

Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse III Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

Discipline ou spécialité :

Energétique et Transferts

Présentée et soutenue par :

Bafétigué OUATTARA

le : mardi 27 novembre 2012

Titre :

Prise en compte des caractéristiques thermophysiques des parois dans le processus de séparation des constituants d'un mélange binaire ou d'un nanofluide par diffusion thermogravitationnelle en milieu poreux

Ecole doctorale :

Mécanique, Energétique, Génie civil et Procédés (MEGeP)

Unité de recherche :

Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT)

Directeur(s) de Thèse :

Pr. Abdelkader MOJTABI

Rapporteurs :

Hamda BEN HADID Professeur de l'Université de Lyon I
Rachid BENNACER Professeur des Universités, ENS-Cachan

Membre(s) du jury :

Mounir BOU-ALI Professeur de l'Université de Mondragon-Espagne, Examinateur
Marie Catherine CHARRIER-MOJTABI Professeur de l'Université de Toulouse III, Co-directrice
Pierre COSTESEQUE Docteur d'Etat, Conseiller Scientifique CNRS, Examinateur
Abdelkader MOJTABI Professeur de l'Université de Toulouse III, Directeur de Thèse
Andrew S. REES Professeur de l'Université de Bath-Angleterre, Examinateur

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse III - Paul Sabatier

Spécialité : Énergétique et Transferts

Présentée et soutenue par

Bafétigué OUATTARA

Le 27 Novembre 2012

Prise en compte des caractéristiques thermophysiques des parois dans le processus de séparation des constituants d'un mélange binaire ou d'un nanofluide par diffusion thermogravitationnelle en milieu poreux

Composition du Jury

H. Ben Hadid	Professeur de l'Université de Lyon I	Rapporteur
R. Bennacer	Professeur à l'ENS Cachan	Rapporteur
M. Bou-Ali	Professeur de l'Université de Mondragon-Espagne	Examineur
M. C. Charrier-Mojtabi	Professeur de l'Université de Toulouse III	Co-Directrice de thèse
P. Costesèque	Docteur d'État, Conseiller Scientifique CNRS	Examineur
A. Mojtabi	Professeur de l'Université de Toulouse III	Directeur de thèse
D. A. S. Rees	Professeur de l'Université de Bath-Angleterre	Examineur

École doctorale : Mécanique, Énergétique, Génie Civil et Procédés (MEGEP)

Unité de recherche : Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT)

Directeur de Thèse : Pr. Abdelkader MOJTABI

À la mémoire de feu Bamory OUATTARA
mon oncle chéri, parti beaucoup trop tôt

À mon père, à ma mère
À la famille OUATTARA, DIABY et SÈNE
À mon épouse, Sali SÈNE

Remerciements

Voici venu maintenant le grand moment d'exprimer toute ma reconnaissance aux personnes qui m'ont encadré et soutenu de près ou de loin au cours cette thèse. C'est un exercice difficile auquel j'ai pensé régulièrement tout au long de la rédaction et j'espère avoir trouvé les mots justes. J'en oublierai certainement quelques unes et je les prie de m'en excuser par avance. Ces trois années de thèse se sont déroulées au sein du groupe des Études en Milieu Poreux (GEMP) de l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT). Mes premiers remerciements vont à la direction de l'IMFT et à Madame Sylvie Lorthois, responsable du groupe GEMP, pour m'avoir accueilli au sein de ce laboratoire.

Ma plus profonde gratitude s'adresse au Professeur Abdelkader Mojtabi qui, en plus d'être l'instigateur de ce projet, m'a guidé tout au long de cette thèse. Sa grande compétence et ses idées foisonnantes ont été pour moi autant d'atouts qui m'ont permis de progresser et qui m'ont réellement donné goût aux aspects de la recherche tant académique qu'industrielle. Mon estime pour lui n'a d'égal que sa gentillesse et sa disponibilité.

J'exprime ma plus profonde reconnaissance au Professeur Marie Catherine Charrier-Mojtabi qui a co-dirigé cette thèse. Je la remercie aussi pour le temps qu'elle m'a consacré tout en me faisant profiter de ses cultures et de ses rigueurs scientifiques. J'ai tout particulièrement apprécié la disponibilité et l'ensemble des rapports scientifiques et humains que j'ai pu partager avec elle.

Je remercie mes rapporteurs, les Professeurs Rachid Bennacer et Hamda Ben Hadid, pour avoir accepté de consacrer une partie de leurs temps à l'examen de cette thèse. L'analyse attentive et les remarques constructives dont ils m'ont fait part, ont contribué à la valorisation de mon travail.

C'est un immense privilège d'avoir le Professeur Mounir Bou-Ali comme examinateur de mon travail. Je suis réellement heureux de pouvoir le compter dans mon jury, et je l'en remercie vivement.

Je suis reconnaissant au Docteur Pierre Costesèque pour les multiples discussions qui m'ont éclairé sur le problème de la thermodiffusion et sur les milieux poreux. Il m'a fait découvrir l'expérimentation physique et n'a cessé de me donner des conseils issus de sa longue expérience dans ce domaine.

Je tiens à remercier le Docteur D. Andrew S. Rees du Département de Mechanical Enginee-

ring de l'Université de Bath (U. K.). Je lui suis reconnaissant pour son esprit d'ouverture, sa disponibilité ainsi que ses qualités humaines. Ses yeux d'expert tant sur le plan théorique que numérique ont apporté beaucoup à mes travaux de recherche.

Aux Professeurs Paul Assamoi A., Siaka Touré et Arsène Kobéa T. respectivement Directeur du Laboratoire de Physique de l'Atmosphère, Directeur du Laboratoire d'Énergie Solaire et responsable du Groupe Géomagnétisme et Aéronomie de l'Université Félix Houphouët Boigny, j'exprime toute mon admiration et mes remerciements les plus sincères pour m'avoir initié à la recherche. Je profite de cette opportunité pour dire merci à tous les membres du Laboratoire de physique de l'Atmosphère.

Je remercie les Docteurs Pascal Puech du Centre d'Élaboration de Matériaux et d'Étude Structurales (CEMES) et Emmanuel Flahaut du Centre Interuniversitaire de Recherche et d'Ingénierie des Matériaux (CIRIMAT) pour l'aide apportée lors des expériences sur les nanofluides.

Je remercie tout le personnel de l'IMFT et en particulier Suzy Bernard, Yannick Exposito, Céline Perles Picotto, Muriel Sabater, Sandrine Chupin, Hervé Ayroles. Je remercie Ruddy Soeparno, le technicien du groupe pour son aide à la mise en place du dispositif expérimental. J'ai une pensée très fraternelle pour mes formidables collègues du bureau 103, Ali et Loujaine avec qui j'ai eu une bonne collaboration et une amitié très sincère durant ma thèse. Ali, Cédric, Julien et Falilou, je n'oublierai jamais nos discussions sur différents sujets, durant les pauses.

Je voudrais rendre hommage à mon épouse, la belle Sali pour son soutien et sa compréhension sans lesquels ce travail n'aurait pas connu cette fin heureuse.

Je tiens à remercier mes chers parents pour leur prière, leur soutien permanent, encouragement, aide matérielle et morale qu'ils m'ont apportés durant toutes mes études. Je ne saurais terminer sans remercier mes ami(e)s qui m'ont soutenu durant toutes ces périodes d'étude : Moustapha Diaby, Ben Ibrahima Légué, Lucien Koné, Raymond Diby, Soualo Ouattara, Daouda Ouattara, Marcellin Adon, Jeans Charles Kpidi...

Pour finir, je dirai simplement merci à tous ceux qui, de près comme de loin, ont contribué à la réussite de ce travail de recherche.

« Nul n'est en mesure, si robuste soit-il, de tendre une peau sur un tambour ; c'est avec le concours de l'allène, que l'on parvient à réaliser ce travail patient et délicat ».

Professeur NIANGORAN Boua Georges

Résumé

Nous proposons une étude analytique et numérique de l'influence de la conductivité thermique et de l'épaisseur des parois, qui délimitent une cellule rectangulaire horizontale, sur la séparation thermogravitationnelle des constituants d'un mélange binaire. Cette problématique est d'une grande importance pour ce qui est de la séparation des espèces par diffusion thermogravitationnelle. En effet, l'épaisseur de la couche fluide dans une colonne verticale conduisant à la séparation optimale est inférieure au millimètre pour les mélanges binaires étudiés et l'épaisseur des parois utilisées est de l'ordre de deux millimètres ou plus. En outre, la conductivité thermique des parois est généralement différente de la conductivité thermique de la couche poreuse saturée. Nous considérons une cellule horizontale de grande extension longitudinale remplie d'un milieu poreux saturé par un mélange binaire délimité par deux parois de même épaisseur et de même conductivité thermique. Les surfaces extérieures de ces parois sont soumises à un flux de chaleur constant. Nous étudions la stabilité linéaire de la solution d'équilibre et de la solution monocellulaire. La solution d'équilibre trouvée perd sa stabilité via une bifurcation stationnaire ou une bifurcation de Hopf compte tenu des valeurs des paramètres adimensionnels considérés.

Pour des facteurs de séparations ψ tels que $\psi \geq \psi_{mono} = 1 / \left[\frac{10 Le(1 + 2d\delta)^2}{51 d^2 \delta^2 + 70 d \delta^3 - 10 - 12 d \delta} - 1 \right]$, les paramètres critiques associés à la transition entre la solution d'équilibre et l'écoulement convectif monocellulaire sont $Ra_{cs} = 12(1 + 2d\delta) / [1 + \psi(2Le d\delta + Le + 1)]$ et $k_{cs} = 0$ représentant respectivement le nombre de Rayleigh critique et le nombre d'onde critique avec : Le le nombre de Lewis, δ le rapport de l'épaisseur des parois sur l'épaisseur de la couche poreuse et d le rapport de leur conductivité thermique respective.

Un très bon accord est trouvé entre les valeurs critiques obtenues analytiquement et celles obtenues par la méthode spectrale Tau.

Nous montrons dans ce travail que la séparation des espèces d'une solution binaire dépend fortement de d et δ pour des valeurs du nombre de Rayleigh supérieures au nombre de Rayleigh conduisant à la séparation maximale. Il ressort également de cette étude que la séparation est sous-estimée lorsqu'on ne prend pas en compte l'effet des caractéristiques thermiques des parois. Les résultats analytiques et numériques obtenus sont en bon accord.

Dans la dernière partie de la thèse, nous présentons des travaux expérimentaux portant sur la séparation dans les nanofluides à base de nanotubes de carbone.

Mots clés : Convection ; Thermodiffusion ; Effet Soret ; Thermogravitation ; Mélange binaire ; Milieu poreux ; Séparation ; Stabilité linéaire ; Nanofluides ; Nanotubes de carbone.

Abstract

In the present work, we study analytically and numerically the influence of the thermal conductivity and the thickness of the walls of a horizontal rectangular cell on the species separation of binary mixture. This problem is of great importance for species separation by thermogravitational diffusion. The thickness of the fluid layer leading to optimal separation is less than a millimeter for the binary mixtures investigated and the wall thickness is of the order of two millimeters or more. Furthermore the conductivity of the plates is generally different from the conductivity of the saturated porous layer. We consider a horizontal cell of large longitudinal extension filled with a porous medium saturated by a binary mixture bounded by plates of the same thickness and the same thermal conductivity. The outer surfaces of plates are subjected to a constant heat flux. We study the stability of the equilibrium solution and the unicellular flow. The equilibrium solution is found to lose stability via a stationary bifurcation or a Hopf bifurcation depending on the values of the dimensionless parameters of the problem. For separation ratio $\psi \geq \psi_{mono} = 1 / \left[\frac{10 Le(1 + 2d\delta)^2}{51 d^2 \delta^2 + 70 d \delta^3 - 10 - 12 d \delta} - 1 \right]$, the critical parameters associated to the primary transition are $Ra_{cs} = 12(1 + 2d\delta)/(1 + \psi(1 + Le + 2Le d\delta))$ and $k_{cs} = 0$ which corresponds to the transition between the equilibrium solution and the unicellular one. In these relation Le is the Lewis number, δ is the ratio of plates over the porous layer thickness and d , their respective thermal conductivity ratio. A very good agreement is found between the critical values obtained analytically and the ones obtained by the spectral Tau numerical procedure. We show in this work that the separation of the species in binary mixtures depends strongly on d and δ for values of the Rayleigh number greater than the Rayleigh number leading to the maximum separation. It also emerges from this study that the separation is underestimated when we do not take into account the effect of the conducting walls. A good agreement is observed between the analytical results and the numerical simulations.

In the last part of the thesis, we undertake experimental work on the separation in nanofluids containing nanotubes of carbon.

Keywords :

Convection ; Thermodiffusion ; Thermogravitation ; Binary mixture ; Soret effect ; Porous medium ; Separation ; Linear stability ; Nanofluids ; Nanotubes of carbon.

Nomenclature

Lettres latines

A		rapport d'aspect de la cavité poreuse, $A = \frac{L}{H}$
a	m^2/s	diffusivité thermique effective du mélange, $a = \frac{\lambda_p}{(\rho c)_f}$
a_s	m^2/s	diffusivité thermique du métal, $a_s = \frac{\lambda_s}{(\rho c)_p}$
a_p	m^2/s	diffusivité thermique du milieu poreux, $a_p = \frac{\lambda_p}{(\rho c)_p}$
d		rapport de conductivité thermique, $d = \frac{\lambda_s}{\lambda_p}$
C		fraction massique du constituant le plus lourd du mélange
C_0		fraction massique initiale du constituant le plus lourd du mélange
C_p	$J/kg.K$	chaleur spécifique à pression constante
c		perturbation de la fraction massique
$c.c$		complexe conjugué
C_S		gradient de fraction massique selon \vec{e}_x
$(C_p)_{fb}$	$J/kg.K$	chaleur spécifique du fluide de base
$(C_p)_{np}$	$J/kg.K$	chaleur spécifique des nanoparticules
$(C_p)_{nf}$	$J/kg.K$	chaleur spécifique du nanofluide
C_T		gradient de température selon \vec{e}_x
d_p		diamètre des pores
D	m^2/s	coefficient de diffusion isotherme, i.e. coefficient de diffusion de Fick
D_T	$m^2/s.K$	coefficient de thermodiffusion
D_T^*	$m^2/s.K$	coefficient de thermodiffusion en milieu poreux
g, \vec{g}	m/s^2	accélération et vecteur accélération de la pesanteur
H	m	épaisseur de la cavité poreuse selon \vec{e}_y
h	m	épaisseur des plaques en métal selon \vec{e}_y
K	m^2	perméabilité du milieu poreux
k		nombre d'onde adimensionnel des perturbations dans la direction \vec{e}_x
L	m	longueur de la cellule selon \vec{e}_x
Le		nombre de Lewis, $Le = \frac{a}{D}$
\vec{n}		normale sortante d'une surface
NTC		nanotubes de carbone
P	Pa	pression
q'	W/m^2	densité de flux thermique
Ra		Rayleigh de filtration, $Ra = \frac{K g H \beta_T \Delta T_2}{a \nu}$
S		la séparation
S_T	K^{-1}	coefficient Soret, $S_T = \frac{D_T}{D}$
T_1	K	température à l'intérieure des plaques supérieure de la cellule

T_3	K	température à l'intérieure des plaques inférieure de la cellule
T_2	K	température à l'intérieure de la cavité poreuse
(U, V)	m/s	composantes du vecteur vitesse
\vec{V}	m/s	vecteur vitesse
\vec{V}^*	m/s	vecteur vitesse de filtration
(x, y)		coordonnées cartésiennes
r_{np}	m	rayon des nanoparticules

Lettres grecques

β_T	K^{-1}	coefficient d'expansion thermique du fluide binaire
$(\beta_T)_{fb}$	K^{-1}	coefficient de dilatation du fluide de base
$(\beta_T)_{np}$	K^{-1}	coefficient de dilatation des nanoparticules
$(\beta_T)_{nf}$	K^{-1}	coefficient de dilatation du nanofluide
β_C		coefficient d'expansion massique du fluide binaire
δ		rapport d'épaisseur, $\delta = \frac{h}{H}$
ϵ^*		porosité du milieu poreux
ϵ		porosité normalisée du milieu poreux, $\epsilon = \frac{\epsilon^*}{\sigma}$
γ	$Pa.s$	le coefficient de viscosité volumique
λ_p	$W/m.K$	conductivité thermique effective du milieu poreux saturé
λ_s	$W/m.K$	conductivité thermique des plaques horizontales
λ_{np}	$W/m.K$	conductivité thermique des nanoparticules
λ_{fb}	$W/m.K$	conductivité thermique du fluide de base
λ_{nf}	$W/m.K$	conductivité thermique du nanofluide
λ_{cl}	$W/m.K$	conductivité thermique des grappes
λ_{nc}	$W/m.K$	conductivité thermique du nanocouche
μ	$Pa.s$	viscosité dynamique
μ_{nf}	$Pa.s$	viscosité dynamique du nanofluide
μ_{fb}	$Pa.s$	viscosité dynamique du fluide de base
ν	m^2/s	viscosité cinématique
$(\rho c)_f$	$J/m^3.K$	capacité calorifique volumique du mélange
$(\rho c)_s$	$J/m^3.K$	capacité calorifique volumique des plaques métalliques
$(\rho c)_p$	$J/m^3.K$	capacité calorifique volumique effective du milieu poreux saturé
φ		fonction de courant
ψ		facteur de séparation du mélange considéré, $\psi = \frac{\beta_C \Delta C}{\beta_T \Delta T}$
ψ_{mono}		facteur de séparation délimitant le régime de convection monocellulaire

ϕ		fraction volumique des nanoparticules
Φ		facteur de sphéricité
ρ	kg/m^3	masse volumique
σ		rapport des capacités calorifiques volumiques, $\sigma = \frac{(\rho c)_p}{(\rho c)_f}$
τ	kg/s	flux de matière à travers une section droite de la cellule
θ_1	K	perturbation de la température de la plaque supérieurs de la cellule
θ_3	K	perturbation de la température de la plaque inférieurs de la cellule
θ_2	K	perturbation de la température de la cavité poreuse
α		rapport de diffusivité thermique, $\alpha = \frac{a_s}{a_p}$

Indices

b	désigne les champs de base
c	désigne les grandeurs critiques
C	chaud
ef	effectif
F	froid
f	fluide
fb	fluide de base
np	nanoparticules
nf	nanofluide
num	désigne une valeur trouvée numériquement
max	maximum
$o2$	bifurcation de Hopf après la perte de stabilité de l'écoulement monocellulaire
s	solide

Table des matières

Table des matières

1	Introduction générale	1
1.1	État de l’art	2
1.1.1	Convection naturelle et convection thermosolutale	2
1.1.2	Thermodiffusion	2
1.1.3	Diffusion thermogravitationnelle	5
1.1.4	Convection thermosolutale en milieu poreux	5
1.1.4.1	Convection thermosolutale sans effet Soret	5
1.1.4.2	Convection thermosolutale avec effet Soret	8
1.1.5	Travaux portant sur la prise en compte de l’influence des parois	11
1.2	Contenu du manuscrit	12
2	Formulation mathématique	15
2.1	Équations de conservation	15
2.1.1	Théorèmes fondamentaux	15
2.1.2	Équation de conservation de la masse	17
2.1.3	Équation de conservation de la quantité de mouvement	17
2.1.4	Équation de conservation de l’énergie	18
2.1.5	Équation de conservation des espèces	19
2.1.6	Approximation de Boussinesq	21

2.2	Modélisation des écoulements en milieu poreux	21
2.2.1	Paramètres caractérisant le milieu poreux	23
2.2.1.1	Volume élémentaire représentatif (V.E.R.)	23
2.2.1.2	La Porosité	23
2.2.1.3	La perméabilité d'un milieu poreux	24
2.2.2	Modèles d'écoulement en milieu poreux	25
2.2.2.1	Équation de continuité.	25
2.2.2.2	Loi de Darcy.	25
2.2.2.3	Écoulement unidirectionnel à basse vitesse	26
2.2.2.4	Équation de Darcy généralisée	26
2.2.2.5	Nombre de Reynolds de pore	27
2.2.3	Transfert de chaleur en milieu poreux	27
2.2.3.1	Les deux modes de description adoptés	28
2.2.4	Transfert de masse	30
3	Prise en compte des caractéristiques thermiques et géométriques des parois	33
3.1	Introduction	33
3.1.1	Convection en présence d'effet Soret, sans prise en compte des caractéristiques des parois	34
3.1.2	Convection thermique avec prise en compte des caractéristiques des parois	35
3.2	Formulation mathématique	36
3.2.1	Formulation adimensionnelle du problème et conditions aux limites . .	39
3.2.1.1	Choix des grandeurs de référence.	39
3.2.1.2	Système d'équations adimensionnelles	39
3.2.1.3	Conditions aux limites adimensionnelles	40
3.3	Stabilité linéaire de la solution d'équilibre	40
3.3.1	Stabilité linéaire de la solution d'équilibre dans le cas d'une cellule horizontale infinie.	40

3.3.1.1	Équations de stabilité linéaire	41
3.3.1.2	Décomposition en modes normaux	43
3.3.1.3	Transition stationnaire	44
3.3.1.4	Cas des perturbations de très grandes longueurs d'onde . . .	47
3.3.1.5	Bifurcation de Hopf	61
3.4	Conclusion	67
4	Prise en compte des caractéristiques thermophysiques des parois sur la séparation des constituants d'un mélange binaire en milieu poreux	69
4.1	Introduction	69
4.2	Solution analytique de l'écoulement monocellulaire	72
4.2.1	Approximation de l'écoulement parallèle.	72
4.2.2	Formulation mathématique du problème dans le cadre de l'écoulement parallèle	73
4.2.3	Détermination de la fonction de courant	74
4.2.4	Équations générales du profil de température et de concentration	74
4.2.4.1	Champs de température	74
4.2.4.2	Champs de concentration	75
4.3	Stabilité linéaire de la solution monocellulaire	78
4.4	Simulations numériques	81
4.4.1	Stabilité de la solution monocellulaire	83
4.5	Conclusion	88
5	Séparation thermodiffusionnelle des constituants d'un nanofluide à base de nanotubes de carbone	89
5.1	Introduction	89
5.2	État de l'art sur les nanofluides	90
5.3	Les nanofluides à base de nanotubes de carbone	92
5.4	Caractéristiques thermophysiques des nanofluides	94

5.5	La viscosité dynamique des nanofluides	94
5.6	La conductivité thermique des nanofluides	95
5.7	Étude expérimentale en milieu fluide	97
5.7.1	Description de la cellule	98
5.7.2	La spectrométrie Raman	99
5.7.3	Expérience 1 : Carboxymethylcellulose + Nanotubes de Carbone (NTC) + Eau	100
5.7.4	Expérience 2 : N-Methyl-2-Pyrrolidone (NMP)+ Nanotubes de Car- bone (NTC)	103
5.8	Conclusion	104
6	Conclusions générales et perspectives	107
A	Détermination des paramètres critiques (Ra_{co}, k_{co}, ω_{co}) de la bifurcation de Hopf par la méthode spectrale Tau pour différentes valeurs de ϵ, d, δ, Le et ψ.	111

Table des figures

Table des figures

iv

1.1	Profil de température au niveau des parois dans le cas d'une cavité poreuse chauffée par le bas et saturée par un mélange binaire.	2
1.2	(a) Phénomène de convection naturelle dans une cavité différentiellement chauffée, (b) Diffusion thermique ou thermodiffusion, (c) Processus thermogravitationnel, répartition des concentrations à l'état stationnaire.	3
2.1	Un élément de volume du domaine fluide.	16
2.2	Exemples de milieux poreux naturels (d'après " Convection in porous media [74]").	22
2.3	Une représentation schématique de l'écoulement de la loi de Darcy dans un milieu poreux.	26
3.1	Couche poreuse d'épaisseur H et de longueur L , délimitée par deux plaques horizontales d'épaisseur h et saturée par un fluide binaire.	37
3.2	Régionnement du plan (Ra, ψ) correspondant aux différentes migrations du constituant le plus lourd au sein de la cavité.	50
3.3	Diagramme de stabilité $Ra_c = f(\psi)$ pour $Le = 5$, $d = 5$ et $\delta = 1$, trait discontinu : $\psi_H = \frac{-1}{1 + (1 + 2d\delta)Le}$ et $Ra_0 = \frac{12(1 + 2d\delta)}{1 + \psi(1 + Le + 2d\delta Le)}$	55
3.4	Diagramme de stabilité $Ra_{cs} = f(\psi)$ pour $Le = 232$, $d = 28.4$ et $\delta = 3$	56
3.5	Diagramme de stabilité $k_{cs} = f(\psi)$ pour (a) $Le = 5$, $d = 5$, $\delta = 1$ et (b) $Le = 232$, $d = 28.4$ et $\delta = 3$. Trait discontinu : $\psi_H = \frac{-1}{1 + (1 + 2d\delta)Le}$	57

3.6	Dépendance du nombre de Rayleigh critique, Ra_{cs} sur le nombre d'onde critique, k_{cs} pour $\delta = 1$, $Le = 5$, $\psi = 0.1$ et pour différentes valeurs du rapport de conductivité thermique, $d = \lambda_s/\lambda_p = 0.005, 0.05, 0.5, 1, 5$ et 1000	58
3.7	Dépendance du nombre de Rayleigh critique, Ra_{cs} sur le nombre d'onde critique, k_{cs} pour $d = 2$, $Le = 5$, $\psi = 0.1$ et pour différentes valeurs du rapport de conductivité thermique, $\delta = 0.005, 0.05, 0.5, 1, 5$ et 20	59
3.8	Dépendance du nombre de Rayleigh critique, Ra_c sur le nombre d'onde critique, δ pour $\delta = 1$, $Le = 5$, $\psi = 0.1$ et pour différentes valeurs du rapport de conductivité thermique, $d = 0.005, 0.05, 0.5, 1, 5$ et 50	60
3.9	Diagramme de stabilité $Ra_c = f(\psi)$ pour $Le = 5$, $d = 5$, $\delta = 1$, et pour différentes valeurs de la porosité normalisée ($\epsilon = 0.3, 0.4, 0.5, 0.7$) (méthode spectrale Tau, ordre 5). En trait plein : bifurcation stationnaire. En cercles pleins : bifurcation de Hopf. En trait discontinu : $\psi_H = \frac{-1}{1 + (1 + 2d\delta)Le}$. L'influence de la porosité normalisée est précisée dans la figure en médaillon.	64
3.10	Diagramme de stabilité $Ra_c = f(\psi)$ pour $Le = 232$, $d = 28.4$, $\delta = 3$, et pour différentes valeurs de la porosité normalisée ($\epsilon = 0.3, 0.4, 0.5, 0.7$) (méthode spectrale Tau, ordre 5). En trait plein : bifurcation stationnaire. En cercles pleins : bifurcation de Hopf. L'influence de la porosité normalisée est précisée dans la figure en médaillon.	65
3.11	Diagramme de stabilité $\omega_{co} = f(\psi)$ pour (a) $\epsilon = 0.4$, $Le = 5$, $d = 5$, $\delta = 1$, (b) $\epsilon = 0.4$, $Le = 232$, $d = 28.4$, $\delta = 3$ dans le cas de bifurcation de Hopf.	66
3.12	Diagramme de stabilité $k_{co} = f(\psi)$, pour $\epsilon = 0.4$, $Le = 5$, $d = 5$, $\delta = 1$	67
4.1	Régions du plan (Ra, ψ) correspondant aux différentes structures d'écoulement à l'intérieur de la cavité rectangulaire ($A = 10$) pour $Le = 3$, $d = 1$ et $\delta = 0.1$. I : 2 solutions réelles opposées, II : 4 solutions réelles opposées 2 à 2 opposées, III : 0 solution	78
4.2	(a) Isoconcentrations, (b) Lignes de courant et (c) Isothermes pour $Le = 232$, $\psi = 0.2$, $Ra = 4$, $d = 0$, $\delta = 0$, (sans la prise en compte de l'influence des caractéristiques des parois), $S = 1.86$	83
4.3	(a) Isoconcentrations, (b) Lignes de courant et (c) Isothermes pour $Le = 232$, $\psi = 0.2$, $Ra = 4$, $d = 28.4$, $\delta = 3$, (avec la prise en compte de l'influence des caractéristiques des parois), $S = 2.24$	84
4.4	(a) Isoconcentrations, (b) Lignes de courant et (c) Isothermes pour $Le = 232$, $\psi = 0.2$, $Ra_{opt} = 0.8$, $d = 28.4$, $\delta = 3$, $S = 4.27$	85

4.5	Courbes de la séparation en fonction du nombre de Rayleigh pour $Le = 232$, $\psi = 0.2$, $d = 28.4$, $\delta = 3$ (avec la prise en compte des caractéristiques des parois) et pour $Le = 232$, $\psi = 0.2$, $\delta = 0$ (sans la prise en compte des caractéristiques des parois).	86
4.6	(a) Isoconcentrations, (b) et Lignes de courant pour $Le = 232$, $\psi = 0.2$, $d = 28.4$, $\delta = 3$, $Ra_{cs2_{num}} = 9.51$	87
4.7	(a) Isoconcentrations, (b) et Lignes de courant pour $Le = 232$, $\psi = 0.2$, $d = 28.4$, $\delta = 3$, $Ra_{cs2_{num}} = 9.52$	88
5.1	Différentes structures de nanotubes identifiées.	93
5.2	Représentation graphique d'un nanotube de carbone multi-feuillets (MWNT). . .	93
5.3	Explication schématisée de la création d'un réseau de ponts thermiques (trait rouge) créé par une dispersion de nano-fibres (trait noir) dans un liquide (Beige) qui permet la propagation d'un point chaud (ovale rouge).	93
5.4	Illustration schématique représentant la superposition de liquide autour des nanoparticules. λ_{nc} , λ_{nf} et λ_{np} sont respectivement la conductivité thermique de la nanocouche, du fluide de base, et de la nanoparticule.	97
5.5	(a) Coupe transversale vue de la cellule de thermodiffusion et le dispositif de prélèvement ; (b) Vue extérieure longitudinale de la cellule expérimentale. . . .	98
5.6	Observation après prélèvement à la fin de l'expérience 1.	100
5.7	Spectre de Raman pour l'expérience 1 obtenu à 150 cm^{-1} pour la face chaude (paroi haute) et la face froide (paroi basse). La figure (c) représente un zoom de la Bande G.	102
5.8	Spectre de Raman obtenu pour l'expérience N-Methyl-2-Pyrrolidone + Nanotubes de carbone.	104

Liste des tableaux

Liste des tableaux

vii

1.1	Nombre de Rayleigh critique, Ra_c et nombre d'onde critique k_c sous diverses conditions aux limites, mentionnés par Nield et Bejan [95]. FST : Fixed Surface Temperature ; IMP : Impermeable ; CHF : Constant Heat Flux	8
1.2	Propriétés du mélange eau-éthanol à 60.88 % en masse d'eau et à $22.5^\circ C$	13
1.3	Propriétés thermophysiques de l'eau et de différents solides à $20^\circ C$	13
2.1	Propriétés de quelques matériaux poreux [95]	25
3.1	Comparaison entre les valeurs du nombre de Rayleigh critique Ra_{cs} et le nombre d'onde critique k_{cs} obtenus à partir de la solution "exacte" et de la méthode spectrale Tau d'ordre 5.	54
4.1	Valeurs critiques du nombre de Rayleigh Ra_{co2} , du nombre d'onde k_{co2} et de la pulsation ω_{co2} pour la bifurcation instationnaire à partir de l'écoulement monocellulaire, pour $Le = 232$, $d = 28.4$, $\delta = 3$, $\epsilon = 0.5$ et pour différentes valeurs du facteur de séparation ψ (Méthode spectrale Tau).	82
A.1	Valeurs critiques du nombre de Rayleigh Ra_{co} , du nombre d'onde k_{co} et de la pulsation ω_{co} pour la bifurcation instationnaire, pour $\epsilon = 0.3$, $d = 5$, $Le = 5$, $\delta = 1$ et pour différentes valeurs du facteur de séparation ψ (Méthode spectrale Tau à l'ordre 5).	112
A.2	Valeurs critiques du nombre de Rayleigh Ra_{co} , du nombre d'onde k_{co} et de la pulsation ω_{co} pour la bifurcation instationnaire, pour $\epsilon = 0.4$, $d = 5$, $Le = 5$, $\delta = 1$ et pour différentes valeurs du facteur de séparation ψ (Méthode spectrale Tau à l'ordre 5).	113

A.3	Valeurs critiques du nombre de Rayleigh Ra_{co} , du nombre d'onde k_{co} et de la pulsation ω_{co} pour la bifurcation instationnaire, pour $\epsilon = 0.5$, $d = 5$, $Le = 5$, $\delta = 1$ et pour différentes valeurs du facteur de séparation ψ (Méthode spectrale Tau à l'ordre 5).	114
A.4	Valeurs critiques du nombre de Rayleigh Ra_{co} , du nombre d'onde k_{co} et de la pulsation ω_{co} pour la bifurcation instationnaire, pour $\epsilon = 0.7$, $d = 5$, $Le = 5$, $\delta = 1$ et pour différentes valeurs du facteur de séparation ψ (Méthode spectrale Tau à l'ordre 5).	115
A.5	Valeurs critiques du nombre de Rayleigh Ra_{co} , du nombre d'onde k_{co} et de la pulsation ω_{co} pour la bifurcation instationnaire, pour $\epsilon = 0.3$, $d = 28.4$, $Le = 232$, $\delta = 3$ et pour différentes valeurs du facteur de séparation ψ (Méthode spectrale Tau à l'ordre 5).	116
A.6	Valeurs critiques du nombre de Rayleigh Ra_{co} , du nombre d'onde k_{co} et de la pulsation ω_{co} pour la bifurcation instationnaire, pour $\epsilon = 0.4$, $d = 28.4$, $Le = 232$, $\delta = 3$ et pour différentes valeurs du facteur de séparation ψ (Méthode spectrale Tau à l'ordre 5).	117
A.7	Valeurs critiques du nombre de Rayleigh Ra_{co} , du nombre d'onde k_{co} et de la pulsation ω_{co} pour la bifurcation instationnaire, pour $\epsilon = 0.5$, $d = 28.4$, $Le = 232$, $\delta = 3$ et pour différentes valeurs du facteur de séparation ψ (Méthode spectrale Tau à l'ordre 5).	118
A.8	Valeurs critiques du nombre de Rayleigh Ra_{co} , du nombre d'onde k_{co} et de la pulsation ω_{co} pour la bifurcation instationnaire, pour $\epsilon = 0.7$, $d = 28.4$, $Le = 232$, $\delta = 3$ et pour différentes valeurs du facteur de séparation ψ (Méthode spectrale Tau à l'ordre 5).	119

Chapitre 1

Introduction générale

RÉSUMÉ

Dans ce premier chapitre nous présentons, une revue des travaux concernant la séparation thermogravitationnelle en milieu poreux, et des travaux portant sur la prise en compte de l'influence des parois dans la convection thermosolutale en milieu fluide et poreux. Nous ferons ressortir des travaux récents les principaux résultats théoriques, numériques et expérimentaux.

Le travail de recherche présenté porte sur la prise en compte de l'influence des parois dans le processus de séparation des constituants d'un fluide binaire. Cette problématique est d'une grande importance pour ce qui est de la séparation des espèces par diffusion thermogravitationnelle.

L'intérêt de ce problème vient de la différence observée entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux. Au niveau théorique, les chercheurs supposent que le milieu fluide étudié est soumis soit à des températures constantes et uniformes soit à des flux constants et uniformes. Au niveau expérimental, ces conditions sont imposées non pas au niveau de la surface de la paroi en contact avec le fluide mais au niveau de la surface externe de celle-ci. L'épaisseur de la couche poreuse conduisant à la séparation optimale est inférieure au millimètre pour les mélanges binaires étudiés et l'épaisseur des parois utilisées de l'ordre de deux ou trois millimètres.

À notre connaissance, l'influence des caractéristiques thermiques et géométriques des parois dans le problème de séparation thermogravitationnelle n'a jamais été prise en compte auparavant, alors que l'épaisseur de la couche fluide qui assure le maximum de la séparation est très faible, de l'ordre de quelques dixièmes de millimètres donc inférieure à l'épaisseur des parois encadrant cette couche fluide [104, 82].

On se propose d'étudier l'influence, sur la séparation des espèces, de la conductivité thermique et de l'épaisseur des parois d'une cellule horizontale remplie d'un milieu poreux saturé par

un fluide binaire. La figure 1.1 illustre un profil de température au niveau des parois dans le cas d'une cavité remplie d'un milieu poreux, saturée par un mélange binaire et chauffée par le bas. Comme nous le constatons, ce profil de température n'est pas uniforme le long des parois supérieure et inférieure internes délimitant le milieu poreux.

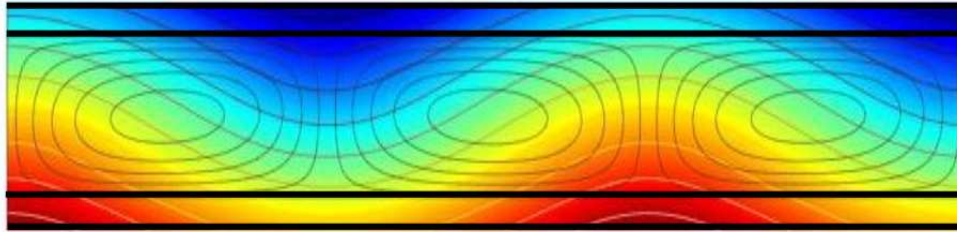


FIGURE 1.1 – Profil de température au niveau des parois dans le cas d'une cavité poreuse chauffée par le bas et saturée par un mélange binaire.

1.1 État de l'art

1.1.1 Convection naturelle et convection thermosolutale

La convection naturelle résulte de l'application d'un gradient de température à tout fluide placé dans le champ de pesanteur. Ce phénomène bien connu a été largement étudié dans le passé. Nous rappelons simplement que le gradient de température induit des variations de densité qui, sous l'action du champ de pesanteur, tendent à faire monter le fluide le long d'une paroi chaude, et à le faire descendre le long d'une paroi froide (figure 1.2a). Ceci a donc pour résultat un mouvement global du fluide dans le domaine considéré. La convection thermosolutale, quand à elle, résulte de la variation de la masse volumique en fonction de la température et de la fraction massique de l'un des constituants du mélange binaire. Nous verrons que le mouvement global du fluide peut s'avérer complexe dans le cas d'un fluide multiconstituant.

1.1.2 Thermodiffusion

La thermodiffusion est une découverte datant du siècle dernier. Dans le cas d'un fluide multiconstituant, la présence d'un gradient de température induit un gradient de concentration au sein du mélange (figure 1.2b). On observe alors, dans le cas d'un mélange de deux constituants, une accumulation de l'un des deux constituants près de la paroi froide et de l'autre près de la paroi chaude. La thermodiffusion a lieu non seulement en phase liquide, mais aussi en phase gazeuse et solide. Ce phénomène est aussi appelé : effet Soret. Il conduit à une séparation des constituants. Cette séparation peut atteindre 25% dans les phases gazeuses à l'état stationnaire, c'est-à-dire lorsque le flux de matière induit par la diffusion moléculaire (Loi de Fick) compense

le flux de thermodiffusion. Les séparations obtenues dans les phases liquides restent cependant plus faibles.

Dans le cas général, lorsqu'un mélange est soumis à un gradient de température dans le champ de pesanteur, les phénomènes de convection et de thermodiffusion sont présents. Le couplage de ces deux phénomènes est appelé diffusion thermogravitationnelle ou effet thermogravitationnel. Dans ces conditions, le recyclage permanent, lié à la convection au sein d'une colonne verticale, des molécules séparées par la thermodiffusion entre les couches fluides ascendantes chaudes et les couches fluides descendantes froides amplifie considérablement la séparation élémentaire produite par la thermodiffusion et conduit à l'enrichissement d'un des constituants du mélange en bas ou en haut de la cellule et à son appauvrissement en haut ou en bas de la cellule (figure 1.2c). L'amplitude du flux de thermodiffusion ne dépend que des caractéristiques physicochimiques des constituants et de la différence de température appliquée. La vitesse de convection dépend de plus des caractéristiques géométriques des cellules utilisées. Cette vitesse doit être ajustée pour obtenir la meilleure séparation possible. En effet, si elle est trop faible, le gradient horizontal de concentration n'est pas perturbé et l'état stationnaire atteint correspond globalement à un champ de concentration à stratification verticale semblable à celui obtenu par thermodiffusion pure. Si la vitesse est trop grande, le mélange s'homogénéise plus rapidement qu'il ne se différencie et les contrastes de concentration qui pourraient s'établir sont annihilés. Entre ces deux extrêmes, il existe un domaine où le couplage est optimal et permet une séparation maximale.

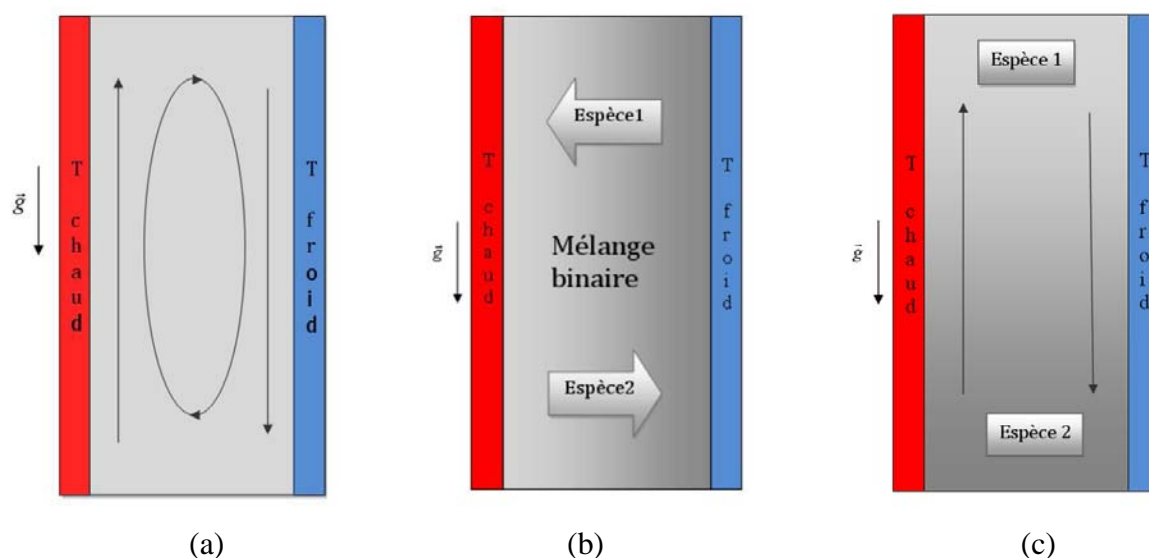


FIGURE 1.2 – (a) Phénomène de convection naturelle dans une cavité différentiellement chauffée, (b) Diffusion thermique ou thermodiffusion, (c) Processus thermogravitationnel, répartition des concentrations à l'état stationnaire.

La propriété de transport d'une espèce par thermodiffusion (appelée effet Ludwig-Soret ou

plus communément effet Soret, après la première étude quantitative publiée par Charles Soret [122]) a fait l'objet de nombreux travaux depuis des décennies. Cet effet décrit le couplage entre le gradient thermique et le flux massique au sein d'un fluide composé de plusieurs espèces chimiques. Dans un mélange monophasique binaire avec des champs de concentration et de température non uniformes, le flux de masse du composant 1, à travers une surface élémentaire dS , comporte les deux contributions provenant du gradient de concentration et du gradient de la température [47], lorsque l'on néglige l'effet du gradient de pression :

$$J = -\rho(D\vec{\nabla}C + D_T^*\vec{\nabla}T) \cdot d\vec{S} \quad (1.1)$$

D désigne le coefficient de diffusion massique du composant 1 dans 2, D_T^* le coefficient de thermodiffusion, ρ la masse volumique, et C la fraction massique du composant 1.

Le coefficient D_T^* est fonction de la température et de la concentration. Ce coefficient D_T^* est souvent approximé par $C(1 - C)D_T$ puisqu'à concentration nulle ou à concentration égale à 1, l'effet Soret est inopérant. De plus on fera l'approximation que ce dernier groupement peut être remplacé par $C_0(1 - C_0)D_T$ où C_0 désigne la fraction massique du constituant considérée à l'état initial ; ce qui suppose que les variations de la température et de la fraction massique restent faibles par rapport à l'état de référence. Le rapport $S_T = \frac{D_T^*}{D}$ est appelé coefficient Soret.

On doit la découverte de la thermodiffusion à Ludwig qui est le premier à avoir mentionné en 1856 [76] l'observation d'une différence de concentration dans une solution aqueuse de sulfate de sodium soumise à un gradient thermique. Il a fallu cependant attendre les travaux de Soret en 1880 [121] et 1881 [122] sur des solutions électrolytiques pour avoir une explication plus approfondie du phénomène, qui porte depuis son nom. Ces travaux ont mis en évidence l'existence d'un gradient de concentration ionique de sens opposé à celui du gradient de température correspondant à une migration des ions vers les parties froides du récipient. Notons qu'entre temps en 1872, Dufour découvre l'effet qui porte maintenant son nom, à savoir l'établissement d'un gradient de température comme conséquence d'un gradient de concentration.

Entre 1887 et 1892, différents travaux en géologie ont pris en compte la thermodiffusion pour expliquer les phénomènes de différenciation magmatique provoqués par les gradients thermiques présents au sein du magma. Les résultats de ces travaux ont ensuite été remis en cause, dès 1893, alors qu'à cette époque le phénomène de diffusion thermogravitationnelle n'était pas encore connu [41].

Ce n'est qu'à partir des années 1931 que les travaux de thermodiffusion ont été repris et un accord a été trouvé entre résultats expérimentaux et résultats basés sur la théorie cinétique des gaz. Les travaux relatifs à la séparation partielle des isotopes ont vu le jour bien plus tard.

1.1.3 Diffusion thermogravitationnelle

Ce n'est qu'en 1938 que l'attention générale des physiciens fut à nouveau attirée par la thermodiffusion, quand Clusius et Dickel [37] réalisèrent un dispositif utilisant le champ de pesanteur pour générer un courant de convection, permettant ainsi d'accroître la séparation produite par la thermodiffusion dans un mélange gazeux. Cette méthode, appelée par la suite diffusion thermogravitationnelle, se révélait alors être la plus efficace pour séparer complètement les isotopes de certains gaz. La même méthode a ensuite été utilisée pour les liquides par Korsching et Wirtz à partir de 1939 [73]. Cette découverte semble par contre être passée, à l'époque, complètement inaperçue des géochimistes.

On doit les premières descriptions phénoménologiques de l'effet thermogravitationnel aux travaux d'Onsager en 1931 [99], de Furry, Jones et Onsager (théorie FJO) en 1939 [58] pour les mélanges gazeux et de De Groot [46] en 1942 pour les liquides. Après quelques années, le développement d'une théorie des phénomènes irréversibles comprenant le processus de la thermodiffusion, par De Groot en 1945 et 1961 [59, 60], puis Casimir en 1954 [28] et enfin par Prigogine en 1961 [108], a permis d'expliquer correctement la phénoménologie de l'effet Soret.

1.1.4 Convection thermosolutale en milieu poreux

1.1.4.1 Convection thermosolutale sans effet Soret

Lorsqu'on est en présence d'un fluide multiconstituant qui sature un milieu poreux, la masse volumique du fluide varie non seulement en fonction de la température du fluide mais aussi de la concentration des différents constituants. De nombreux problèmes rencontrés dans la nature et dans l'industrie peuvent se ramener à l'étude des écoulements convectifs dans des mélanges multiconstituants et en particulier dans un mélange de deux fluides (mélange binaire)[34].

L'intérêt pour la convection "double diffusive" dans les milieux poreux a commencé après que Nield [94] ait étudié la stabilité de l'écoulement dans une couche poreuse horizontale, chauffée par le bas. En utilisant l'analyse de la stabilité linéaire, il a déterminé les valeurs des nombres de Rayleigh critiques caractérisant la naissance de la convection stationnaire pour différentes conditions aux frontières.

Des études expérimentales ont été menées pour déterminer l'apparition de la convection naturelle dans une couche poreuse délimitée par des parois imperméables isothermes [39]. La majorité des travaux expérimentaux dans ce domaine a été limitée à la vérification des prédictions théoriques. Il a également été démontré que la présence de frontières latérales affecte l'apparition de la convection naturelle en limitant les modes admissibles [11].

Trevisan et Bejan [125] ont utilisé une méthode numérique pour étudier la convection thermosolutale dans une cavité à section carrée remplie d'un milieu poreux et saturée par un

fluide binaire, avec des parois verticales maintenues à des températures et à des concentrations constantes et avec des parois horizontales adiabatiques et imperméables. Une analyse d'échelle a été utilisée pour traiter ce problème dans les cas limites des écoulements entraînés par les effets thermiques ou massiques afin de dégager les divers effets qui influencent les résultats globaux de transfert de chaleur et de masse. Ces auteurs ont montré que l'écoulement du fluide était possible au-delà d'un certain nombre de Rayleigh critique quand le nombre de Lewis $Le \approx 1$. Cependant, le mouvement du fluide disparaît complètement pour $Le = 1$ et pour un rapport des forces de poussée d'origine solutale sur les forces de poussée d'origine thermique $N = -1$. Les résultats de cette analyse sont en accord avec les résultats des calculs numériques.

Le problème de la convection thermosolutale dans une couche poreuse horizontale a été considéré par Poulikakos [107] sur la base du modèle de Brinkman. En utilisant l'analyse de la stabilité linéaire, cet auteur a déterminé le seuil d'apparition des écoulements convectifs oscillants et stationnaires en fonction du nombre de Darcy. Mehta et Nandakumar [87] ont étudié l'effet de l'hétérogénéité du milieu poreux, dans une cavité verticale, sur le transfert de chaleur et de masse. Ils ont trouvé que des variations importantes de la perméabilité ont une grande influence sur les écoulements convectifs lorsque les nombres de Rayleigh et de Lewis sont assez grands.

Murray et Chen [92] ont été les premiers à étudier expérimentalement la convection double diffusive dans un milieu poreux. Leur dispositif, composé d'une boîte métallique remplie de billes de verre saturées avec de l'eau distillée, était soumis à des flux de masse et de chaleur. Le nombre de Rayleigh thermique obtenu par les expériences concorde avec celui obtenu par la théorie de la stabilité linéaire. Nithiarasu et al. [97] ont développé un modèle généralisé simulant la gamme entière de l'écoulement de Darcy en milieu poreux jusqu'au cas du fluide pur. Les résultats obtenus montrent l'augmentation des taux de transfert de chaleur et de masse avec le nombre de Darcy.

La convection naturelle dans une cavité rectangulaire horizontale remplie d'une couche poreuse saturée par un fluide binaire, chauffée par le bas et refroidie par le haut avec un flux constant a été étudiée analytiquement et numériquement par Kimura et al. [71]. Il a été montré qu'un écoulement monocellulaire est stable jusqu'à une certaine valeur critique de Rayleigh, au-delà duquel la convection oscillatoire prend naissance. L'analyse de stabilité linéaire prévoit que la solution de base est stable vis-à-vis des perturbations transversales jusqu'à $Ra_c = 506.07$. Dépassée cette valeur, il y a une bifurcation de Hopf avec la fréquence d'oscillation critique $f_c = 22.1$. L'écoulement est plus instable vis-à-vis des perturbations longitudinales : un échange de stabilité a lieu pour $Ra_c \approx 311.53$ avec un nombre d'onde critique égal à zéro. Les auteurs ont effectué d'importants calculs numériques afin de compléter l'analyse pour le cas bidimensionnel. Ils ont considéré des nombres de Rayleigh compris entre 25 et 1050 et un rapport d'aspect A entre 1 et 10.

La convection à amplitude finie dans une cavité poreuse de section carrée, soumise à des flux horizontaux uniformes de chaleur et de masse a été considérée par Mamou et al. [79]. Ils ont montré que pour une même combinaison des paramètres, le problème peut avoir plusieurs so-

lutions quand les forces de poussée d'origine thermique et massique sont opposées et de même ordre de grandeur. Ces solutions sont fortement dépendantes du nombre de Rayleigh thermique et du nombre de Lewis. Les mêmes auteurs [80] ont revu numériquement et analytiquement le problème précédent mais cette fois pour le cas d'une couche poreuse inclinée de grand rapport d'aspect. La solution analytique, basée sur l'hypothèse d'un écoulement parallèle, a été développée et les résultats analytiques sont en bon accord avec les résultats numériques. Ils ont observé que les nombres de Nusselt et de Sherwood étaient minimums à proximité de $N = -1$ et que des solutions multiples étaient aussi possibles. Les nombres de Rayleigh critiques correspondant à l'apparition des mouvements convectifs ont été également déterminés dans le cas limite d'une couche horizontale. L'effet de l'inclinaison de la cavité sur la nature de l'écoulement convectif a été aussi discuté dans leur étude.

Bahloul [6] a étudié analytiquement et numériquement la convection naturelle en couche poreuse rectangulaire. Il a montré que le coefficient de stratification thermique, dépend essentiellement du rapport d'aspect de l'enceinte et qu'il devient presque indépendant du nombre de Rayleigh dans le régime de couche limite. L'étude de stabilité linéaire de l'écoulement parallèle a été utilisée pour déterminer le nombre de Rayleigh critique pour une cavité de grande extension. L'auteur a trouvé que l'écoulement est stable indépendamment du coefficient de stratification.

Rees et Barletta [111] ont présenté une analyse approfondie de l'apparition de la convection dans une couche poreuse inclinée soumise à des conditions aux limites de flux thermiques constants. Ils ont trouvé qu'il existe trois régimes distincts pour lesquels le nombre d'onde critique change de manière discontinue. Le premier est le régime stationnaire associé à un nombre d'onde égal à zéro qui est bien connu pour les couches horizontales. Le deuxième consiste en des modes instables avec un nombre d'onde différent de zéro, tandis que le troisième est constitué d'un mode continu. L'intérêt principal de cette étude se situe dans le processus du changement du critère de déclenchement lorsque la couche est inclinée par rapport à l'horizontale.

Une compilation de la plupart des informations pertinentes sur le nombre de Rayleigh critique et le nombre d'onde pour une couche infinie avec différentes conditions aux limites, (libre ou imperméable ; application de températures ou de flux de chaleur) peut être trouvée dans Nield et Bejan [95] et est reproduite dans le tableau (1.1). Les effets des différents types d'hétérogénéité sur le déclenchement de la convection dans un milieu poreux ont été étudiés par Nield et Kuznetsov [96].

Prosperetti [110] a étudié, au moyen d'un développement en série de Fourier, la stabilité linéaire du problème de Rayleigh-Bénard en prenant en compte les propriétés des parois. Il est constaté que tronquer la série juste au premier terme donne une excellente approximation de la relation de stabilité marginale pour le nombre de Rayleigh et le nombre d'onde de la perturbation. La même tendance est respectée si les deux plaques ont la même conductivité thermique, ou l'une a une température fixe (c'est-à-dire une conductivité infinie) et l'autre une conductivité finie, ou l'une est isolée et l'autre conductrice. L'auteur signale bien que ses résultats se réfèrent au

TABLE 1.1 – Nombre de Rayleigh critique, Ra_c et nombre d'onde critique k_c sous diverses conditions aux limites, mentionnés par Nield et Bejan [95]. FST : Fixed Surface Temperature ; IMP : Impermeable ; CHF : Constant Heat Flux

La surface inférieure	La surface supérieure	Ra_c	k_c
FST, IMP	FST, IMP	$4\pi^2$	π
FST, IMP	CHF, IMP	27.10	2.33
CHF, IMP	CHF, IMP	12	0
FST, IMP	FST, FREE	27.10	2.33
CHF, IMP	FST, FREE	17.65	1.75
FST, IMP	CHF, FREE	π^2	$\pi/2$
CHF, IMP	CHF, FREE	3	0

problème linéaire de seuil et ne sont qu'approximatifs, leurs exactitudes pourraient se rendre utile en tant que point de départ pour des théories faiblement non-linéaires ou pour vérifier d'autres approximations ou des codes informatiques.

1.1.4.2 Convection thermosolutale avec effet Soret

De Groot [46] a étudié la séparation thermogravitationnelle dans un mélange liquide. Il a utilisé pour cela un dispositif constitué de deux plaques verticales et parallèles qui sont portées à des températures différentes. Au sommet et à la base de l'appareil se trouvent deux réservoirs qui sont en communication libre avec l'espace entre les deux plaques. Pour étudier ce problème théoriquement, De Groot a suivi la même démarche utilisée dans la théorie de Furry, Jones et Onsager [FJO] mais en remplaçant $(1 - C)$ par 1 dans $C(1 - C)$. Il a obtenu dans ce cas les expressions des concentrations dans les deux réservoirs. Il a ensuite étudié l'influence de l'écartement entre les deux plaques, de la hauteur des deux plaques, et de l'inclinaison des deux plaques sur le rapport des concentrations en haut et en bas de la colonne.

Après la découverte de l'effet thermogravitationnel, de nombreuses modifications ont été apportées à l'appareil originel de Clusius et Dickel pour améliorer la séparation des constituants à travers le couplage thermodiffusion-convection, et en particulier pour obtenir la meilleure adéquation entre le temps de diffusion thermique et le temps convectif. Ainsi en 1959, Lorenz et Emery [75, 57] ont proposé d'introduire un garnissage poreux dans la colonne de thermogravitation. L'objectif était de s'affranchir de la réalisation de cellule expérimentale nécessitant un très faible écartement entre plaques pour obtenir une séparation optimale. Ainsi dans une colonne avec un grand espacement entre les deux plaques, remplie d'un garnissage poreux, la vitesse du fluide est du même ordre que dans une colonne avec un faible espacement.

La convection naturelle dans une cavité poreuse rectangulaire différentiellement chauffée, rem-

plie par un mélange binaire avec prise en compte de l'effet Soret, a été étudiée analytiquement et numériquement par Bahloul et al. [8]. L'approximation de l'écoulement parallèle a été utilisée pour examiner l'influence des paramètres du problème sur la convection d'amplitude finie dans une cavité poreuse. En l'absence d'un gradient thermique horizontal, des diagrammes de bifurcation typiques ont été obtenus tant pour des liquides purs que pour des mélanges binaires avec effet Soret. Pour un facteur de séparation, $\psi > 0$, la bifurcation est supercritique. Le nombre de Rayleigh supercritique dépend du facteur de séparation et du nombre de Lewis. Toutefois, pour $\psi < 0$, la bifurcation est sous-critique. L'imperfection apportée par un gradient horizontal de température à la bifurcation a été examinée. Pour $\psi > 0$, les résultats analytiques et numériques indiquent l'existence d'écoulements 'naturels' et 'antinaturels'. Numériquement, l'écoulement 'naturel' peut être obtenu en commençant la simulation numérique à partir de conditions initiales associées à la conduction pure. En revanche, des conditions aux limites particulières sont nécessaires pour atteindre l'écoulement dit antinaturel. Ce dernier existe seulement si le nombre de Rayleigh est au dessus d'un nombre de Rayleigh sous-critique. Pour $\psi < 0$, la situation est plus complexe, et il est possible d'obtenir jusqu'à cinq solutions différentes (trois stables et deux instables). Deux des solutions stables correspondent aux écoulements 'naturels' et la troisième à un écoulement 'antinaturel'. Pour le cas particulier $\psi = -1$, le nombre de Rayleigh supercritique associé à l'apparition de la convection est obtenu à partir de l'étude de stabilité linéaire.

Mojtabi et al. [90] ont montré que les vibrations peuvent augmenter ou réduire les transferts de chaleur et de masse ou peuvent retarder ou accélérer l'apparition de la convection. Charrier Mojtabi et al. [32] et Elhajjar et al. [56] ont étudié l'influence des directions des vibrations sur le seuil de stabilité dans une couche infinie d'un fluide binaire, chauffée par le haut ou par le bas. Ils ont conclu que les vibrations verticales ont un effet stabilisant alors que les vibrations horizontales ont un effet déstabilisant sur l'apparition de la convection.

La modélisation de la thermogravitation nécessite la connaissance du coefficient Soret. Plusieurs auteurs ont proposé des méthodes de mesure du coefficient Soret. Ecenarro et al. [52] se sont basés sur la théorie développée dans Ecenarro et al. [51] pour mesurer le coefficient Soret. Ainsi en mesurant la séparation à différents instants durant l'expérience et à l'état stationnaire, ils ont pu trouver les coefficients de diffusion massique et de thermodiffusion pour 5 mélanges binaires différents. Plus récemment, Haugen et al. [62] ont utilisé une méthode similaire pour mesurer les coefficients de thermodiffusion.

Narayana et al. [93] ont fait une analyse de stabilité linéaire de la convection thermosolutale induite par l'effet Soret dans une couche poreuse horizontale soumise à des gradients thermiques et solutaux inclinés d'amplitude finie. Les composantes horizontales de ces gradients induisent une circulation de Hadley, qui devient instable lorsque les composantes verticales de ces gradients sont suffisamment grandes. Ils ont observé qu'en l'absence de gradients horizontaux, le paramètre Soret joue un double rôle sur les modes non-oscillants en ce qui concerne le nombre de Rayleigh vertical solutal dans le milieu alors que le paramètre Soret a toujours montré un

effet déstabilisant sur ces modes. Une observation similaire est faite lorsque les gradients thermiques horizontaux sont absents et que les gradients solutaux horizontaux sont présents. En l'absence de nombres de Rayleigh thermiques horizontaux et solutaux, ils ont observé que les valeurs critiques du nombre de Rayleigh thermique vertical diminuent avec le nombre de Rayleigh vertical solutal alors que cette valeur augmente avec le paramètre Soret.

Bou-Ali et al. [19] ont construit une colonne de thermogravitation (TGC) pour mesurer les coefficients Soret pour différents mélanges. Bou-Ali et al. [20] ont observé que la situation où le constituant le plus lourd se trouve en haut de la colonne verticale et le plus léger en bas peut rester stable si le nombre de Grashof est suffisamment grand.

Charrier Mojtabi et al. [30] ont étudié analytiquement et numériquement la naissance de la convection thermosolutale avec prise en compte de l'effet Soret, dans une couche mince horizontale poreuse remplie d'un mélange binaire et soumise à un flux de chaleur vertical sur ces deux parois horizontales. Les auteurs ont fait une comparaison avec la séparation obtenue dans des colonnes verticales différentiellement chauffées. Les auteurs ont montré que même si la valeur maximale de la séparation est la même pour les deux configurations, l'utilisation de cellules horizontales permet d'obtenir une plus grande quantité de produit séparée. Le maximum de séparation est obtenu en situation horizontale pour une grande valeur du nombre de Rayleigh donc une épaisseur de cellule plus grande.

Costesèque et al. [44] ont choisi de mesurer le coefficient Soret en milieu poreux en milieu libre. À cet effet, pour un mélange liquide donné, ils ont mesuré expérimentalement l'évolution en fonction du temps du gradient vertical de concentration dans la même cellule de thermodiffusion une fois avec le liquide seul, et une autre fois avec un milieu poreux saturé par le même mélange liquide. Ils ont trouvé que le coefficient Soret est quasiment le même dans les deux expériences. Platten et al. [104] ont démontré qu'en inclinant d'un angle θ par rapport à la verticale une colonne de thermogravitation, la quantité du produit séparée est augmentée. Une reformulation très simple de la théorie Furry-Jones-Onsager-Majumdar, dans laquelle ils ont remplacé l'accélération de la pesanteur g par $g \cos \theta$ semble reproduire les résultats d'expériences.

Dutrieux et al. [49] ont proposé une nouvelle méthode pour mesurer le coefficient Soret. Cette méthode consiste à mesurer la vitesse de convection à l'état transitoire et à l'état stationnaire. En effet au début de l'expérience dans une cellule de thermogravitation, on a une stratification verticale du champ de concentration qui est due à la thermodiffusion pure. Cette différence de concentration contribue, avec la différence de température sur une même horizontale au niveau des deux parois verticales, à donner une différence de masse volumique relativement grande entre les voisinages des deux parois verticales et cela conduit à une vitesse relativement grande au début de l'expérience. Mais à la fin de l'expérience, on obtient presque une concentration constante sur une horizontale donc la différence de masse volumique entre les voisinages des deux parois verticales diminue et ensuite la vitesse diminue. En comparant la vitesse au début de l'expérience et la vitesse à l'état stationnaire, ils ont pu trouver le coefficient Soret pour différents mélanges. La principale technique utilisée pour déterminer le coefficient de thermo-

diffusion a été la colonne de thermogravitation. Dans Valencia et al. [128], les mêmes auteurs ont utilisé la colonne de thermogravitation pour mesurer le coefficient de diffusion massique. Ils se sont basés pour cela sur le temps de relaxation et ont comparé l'expression théorique du temps avec les mesures expérimentales. Platten [103] a présenté une revue des différentes techniques utilisées pour la mesure du coefficient Soret.

Les conséquences liées à la présence de gradients thermiques sur le transfert de matière en milieu poreux sont encore mal appréhendées, essentiellement en raison de la complexité induite par la présence de phénomènes couplés. En 2010, Davarzani [45] ont déterminé les coefficients effectifs modélisant les transferts de chaleur et de matière en milieu poreux, et en particulier le coefficient de thermodiffusion effectif. En utilisant la technique de changement d'échelle par prise de moyenne volumique, il a développé un modèle macroscopique de dispersion incluant la thermodiffusion. L'auteur a étudié en particulier l'influence du nombre de Peclet et de la conductivité thermique sur la thermodiffusion. Les résultats ont montré que pour de faibles valeurs de Peclet, le coefficient de Soret effectif en milieu poreux est le même que dans un milieu libre et ne dépend pas du rapport de la conductivité thermique (solide/liquide), résultat trouvé précédemment par Platten et Costesèque [105]. À l'inverse, en régime convectif, le coefficient de Soret effectif diminue. Dans ce cas, un changement du rapport de conductivité thermique modifie la valeur du coefficient de thermodiffusion effectif. Les résultats théoriques trouvés ont montré que, lors de la thermodiffusion pure, même si la conductivité thermique effective dépend de la connectivité de la phase solide, le coefficient effectif de thermodiffusion est toujours constant et indépendant de la connectivité de la phase solide. Le modèle macroscopique trouvé par cette méthode a été validé par comparaison avec des simulations numériques directes à l'échelle de pores. Pour vérifier et consolider ses résultats, un dispositif expérimental a été réalisé pour mesurer les coefficients de transfert en milieu libre et en milieu poreux.

Charrier-Mojtabi et al. [31] ont présenté une étude analytique et numérique de l'influence d'un écoulement généré par des ondes ultrasons (Eckart streaming) sur la séparation des espèces d'un mélange binaire en microgravité. Les auteurs ont montré que l'écoulement monocellulaire induit par "acoustic streaming" peut conduire, dans certaines conditions, à une séparation notable des espèces. Ils ont montré également que l'écoulement monocellulaire perd sa stabilité via une bifurcation de Hopf pour toutes les valeurs du rapport d'aspect normalisé du faisceau acoustique, sauf pour la valeur 0.5 où la bifurcation est stationnaire. Elle est caractérisée par le paramètre acoustique critique $A_c = 148351.8$ et le nombre d'onde critique $k_c = 3.33$.

1.1.5 Travaux portant sur la prise en compte de l'influence des parois

Comme nous venons de le montrer au cours de cette revue bibliographique, on peut distinguer un certain nombre d'études concernant le problème de la thermodiffusion, d'autres concernant l'effet thermogravitationnel, mais les travaux tenant compte de l'influence des parois sur la séparation des constituants d'un mélange de fluides saturant un milieu poreux sont peu nom-

breux. De nombreux auteurs ont examiné comment les caractéristiques des parois affectent le déclenchement de la convection dans les cavités horizontales chauffées par le bas.

Ribando et Torrance [114] ont étudié le cas d'une couche horizontale soumise à un flux de chaleur au niveau de la paroi du bas et maintenue à une température constante sur la paroi du haut. Cette situation se produit lorsque la couche est chauffée par le bas, par exemple, par un chauffage électrique tandis que la surface supérieure est maintenue à une température uniforme grâce à un thermostat. Ils ont trouvé 27.1 et 2.29 respectivement pour le nombre de Rayleigh critique et le nombre d'onde critique. Wang [129] a également considéré le même cas et a obtenu une valeur plus précise, $Ra_c = 27.096$. Résultats très différents de $Ra_c = 4\pi^2$ et $k_c = \pi$ obtenus pour l'équivalent du problème de Rayleigh-Benard en milieux poreux.

Busse et Riahi [27] et Proctor [109] ont étudié la convection thermique dans une couche fluide dans le cas où les frontières de la couche sont moins conductrices que le fluide. Ils ont montré que si le flux de chaleur par conduction à travers la couche n'est pas trop grand, l'échelle horizontale du mouvement est beaucoup plus grande que la hauteur de la couche.

Jenkins et Proctor [65] ont considéré la convection thermique d'amplitude finie tridimensionnelle dans une couche fluide avec des frontières de conductivité finie. Ils ont déterminé la valeur du rapport de la conductivité thermique, $d = \lambda_1/\lambda$ (λ et λ_1 sont respectivement les conductivités thermiques du fluide et de la paroi λ_1) à laquelle le mode préféré de convection passe des cellules de forme carrée (faibles rapports de conductivités thermiques) à des cellules en rouleaux (des rapports de conductivités thermiques tendant vers l'infini). Les auteurs ont montré que le rapport de conductivité pour lequel le passage se produit dépend fortement du nombre de Prandtl, Pr . Pour des valeurs élevées du nombre de Prandtl, la transition se produit lorsque les conductivités du fluide et de la paroi sont du même ordre de grandeur, alors que pour de faible nombre de Prandtl, la valeur critique du rapport de conductivité thermique $d_c \approx Pr^4$ sauf lorsque les parois sont très épaisses, dans ce cas $d_c \approx Pr^3$.

Riley et Winters [115] ont utilisé la théorie de la bifurcation et les interactions modales pour les couches poreuses saturées chauffées par le bas, par analogie avec le problème classique de Rayleigh-Benard. Deux aspects particuliers du problème ont porté sur l'existence de solutions stationnaires multiples et l'influence du rapport d'aspect. Ils se sont intéressés initialement à la stabilité linéaire pour différents rapports d'aspect fixés. Ils ont montré l'existence d'un ensemble infiniment grand de modes propres.

1.2 Contenu du manuscrit

Si la séparation thermogravitationnelle a fait l'objet de nombreux travaux durant ces dernières décennies, de nombreuses études seraient encore nécessaires pour comprendre tous les aspects de ce phénomène. Notre objectif dans ce travail est d'étudier, tout en tenant compte du transfert

thermique au niveau des parois, la séparation thermogravitationnelle des constituants d'un fluide binaire.

Pour illustrer notre étude, nous allons considérer dans un premier temps un mélange binaire eau-éthanol déjà utilisé par Platten et al. [104]. Il s'agit d'un mélange eau-éthanol à 60.88 % en masse d'eau pour un facteur de séparation, $\psi = 0.2$, un nombre de Lewis, $Le = 232$. La température moyenne du mélange est de $22.5^\circ C$, à cette température les propriétés du mélange sont données dans le tableau (1.2). La cavité est remplie avec un milieu poreux de porosité normalisée, $\epsilon = 0.5$, composé de billes de verre. Nous considérerons aussi un mélange gazeux avec un nombre de Lewis, $Le = 5$. Les propriétés thermophysiques de l'eau et de différents solides pour une température de $20^\circ C$ sont données dans le tableau (1.3).

TABLE 1.2 – Propriétés du mélange eau-éthanol à 60.88 % en masse d'eau et à $22.5^\circ C$.

ρ (kg/m^3)	β_T ($^\circ C^{-1}$)	β_C	D (m^2/s)
935.17	7.86×10^{-4}	-0.212	4.32×10^{-10}
D_T ($m^2/s^\circ C$)	ν (m^2/s)	a (m^2/s)	λ ($W/m^\circ C$)
1.37×10^{-12}	2.716×10^{-6}	10^{-7}	0.267

TABLE 1.3 – Propriétés thermophysiques de l'eau et de différents solides à $20^\circ C$.

Propriétés thermophysiques	Les phases fluides	Les phases solides		
	H_2O	Cu	CuO	billes de verres
C_s ($J/Kg^\circ C$)	4181.80	385	561	750
ρ (kg/m^3)	998.2	8954	6450	2500
λ_s ($W/m^\circ C$)	0.593	401	20	1.14
$\beta \times 10^{-5}$ ($^\circ C^{-1}$)	21	16.7	1.8	-

Après avoir introduit le problème de la séparation thermogravitationnelle et présenté une revue bibliographique de cette thématique dans le chapitre 1, nous consacrons le chapitre 2 à la formulation mathématique du problème de séparation thermogravitationnelle.

Au chapitre 3, nous faisons l'analyse de la stabilité linéaire en tenant compte de l'influence des parois délimitant la couche poreuse. L'étude de la stabilité linéaire, montre que la solution d'équilibre perd sa stabilité via une bifurcation stationnaire ou une bifurcation de Hopf selon les valeurs du facteur de séparation et de la porosité normalisée. Le rôle de la porosité est important ; quand elle diminue, la stabilité de la solution d'équilibre est renforcée. Pour une cellule chauffée par le bas, la solution d'équilibre perd sa stabilité via une bifurcation stationnaire lorsque le facteur de séparation $\psi > \psi_{mono}(Le, \epsilon, d, \delta)$, alors que pour $\psi < 0$, elle perd sa stabilité via une bifurcation de Hopf. La solution oscillatoire est instable et redonne une solution stationnaire. Pour une cellule chauffée par le haut, la solution d'équilibre est linéairement

stable si $\psi > 0$ alors que pour $\psi < 0$, on trouve une bifurcation stationnaire comme bifurcation primaire et une bifurcation de Hopf comme bifurcation secondaire. Nous avons déterminé en premier analytiquement les champs de base pour la fonction de courant, de champ de température et de fraction massique, pour l'écoulement monocellulaire. Ensuite, nous avons étudié analytiquement la stabilité linéaire de cet écoulement.

L'objectif principal de ce chapitre est de déterminer l'influence des propriétés thermophysiques des parois délimitant la couche poreuse sur les propriétés de stabilité d'une couche poreuse horizontale saturée par un fluide binaire et son importance dans la séparation des espèces. Une attention particulière est portée sur l'influence du rapport des conductivités et du rapport des épaisseurs.

Le chapitre 4 traite de l'étude analytique et numérique de l'influence des parois d'une cavité poreuse sur la séparation des constituants d'un mélange binaire saturant une couche poreuse horizontale infinie chauffée par le bas. Nous examinons la stabilité de l'écoulement monocellulaire obtenu pour des valeurs données des paramètres physiques du problème. L'influence des paramètres régissant ce problème et plus particulièrement le rôle du facteur de séparation ψ , caractérisant l'effet Soret et celui de la porosité normalisée, ϵ , sont étudiés théoriquement et numériquement.

Le chapitre 5 traite de l'observation d'une séparation thermodiffusionnelle des constituants d'un nanofluide. Nous avons conduit 2 expériences sur deux types nanofluides. Le premier nanofluide est constitué de nanotubes de carbone (15% simple parois, 80% double parois, 5% triple parois), d'eau et de Carboxymethylcellulose (CMC) comme dispersant et le second est constitué de nanotubes de carbone (15% simple parois, 80% double parois, 5% triple parois) et de N-Methyl-2-Pyrrolidone comme fluide de base. L'objectif de ces expériences est de voir si les nanotubes de carbone de type simple paroi peuvent se différencier des deux autres variétés.

Enfin, au chapitre 6, les conclusions et perspectives pour les travaux futurs sont présentées.

Chapitre 2

Formulation mathématique

RÉSUMÉ

Ce chapitre présente les modèles mathématiques utilisés pour la description des écoulements et des transferts de chaleurs et de masse en milieu poreux.

2.1 Équations de conservation

Il existe plusieurs méthodes pour obtenir les équations fondamentales de la mécanique des fluides. Nous considérons un volume de contrôle élémentaire pour analyser les variations au cours du temps, de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et des espèces. Cette méthode qui consiste à faire un bilan des quantités transportées et produites au cours du temps, dans un volume élémentaire de contrôle, a été largement étudiée dans les ouvrages de référence [15, 106] mentionnés.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons rappeler les différentes équations de conservation qui seront reprises dans la suite de ce travail. On présente dans un premier temps, les équations de continuité, de Navier-Stokes et de l'énergie. Nous présentons ensuite l'équation de conservation des espèces pour un fluide multiconstituant, puis pour un fluide binaire.

2.1.1 Théorèmes fondamentaux

Soit D un domaine de contrôle de volume V et de surface Σ , pris dans le milieu continu Ω , que l'on étudie (Fig. 2.1). Soit M la position d'un élément de volume élémentaire du fluide dV appartenant à D , que l'on suit au cours du temps. Soit f une fonction définie et continue sur D , désignant une grandeur intensive.

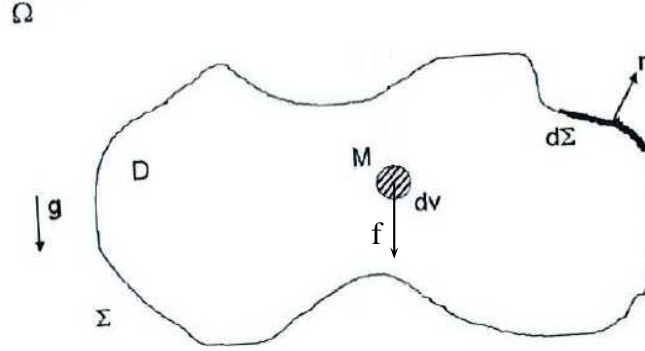


FIGURE 2.1 – Un élément de volume du domaine fluide.

Le taux de variation de l'intégrale de f sur le volume V en fonction du temps est défini par :

$$\frac{d}{dt} \int_D f dV = \int_D \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{\Sigma} f \vec{V} \cdot \vec{n} d\Sigma \quad (2.1)$$

où \vec{V} désigne la vitesse locale à la surface de contrôle et \vec{n} la normale sortante du volume de contrôle considéré.

$\frac{d}{dt}$ désigne la dérivée particulaire c'est-à-dire la dérivée obtenue lorsqu'on suit le domaine de fluide D dans son mouvement.

On peut également transformer le dernier terme de l'équation précédente en intégrale de volume en utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky, autrement appelé théorème de la divergence :

$$\int_{\Sigma} f \vec{V} \cdot \vec{n} d\Sigma = \int_D \vec{\nabla} \cdot (f \vec{V}) dV \quad (2.2)$$

En combinant (2.1) et (2.2), on peut alors écrire le théorème de transport (ou règle de Leibnitz) sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \int_D f dV = \int_D \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (f \vec{V}) \right] dV \quad (2.3)$$

On utilisera également un autre lemme fondamental utilisé en mécanique des fluides qui permet d'obtenir une équation locale à partir de la connaissance d'une relation intégrale pour tous les domaines D appartenant à une famille dense d'ouverts de Ω :

$$\int_D f(\vec{X}, t) dV = 0 \quad \forall D \in \Omega \quad \Rightarrow \quad f(\vec{X}, t) = 0 \quad \forall M \in \Omega \quad (2.4)$$

Où \vec{X} est le vecteur position.

2.1.2 Équation de conservation de la masse

La masse contenue dans le volume de contrôle D , où ρ désigne la masse volumique locale (i.e. masse par unité de volume), est donnée par :

$$m = \int_D \rho(\vec{X}, t) dV \quad (2.5)$$

Dans le cas où, il n'y a ni création, ni disparition de matière dans D au cours de son mouvement et ce quel que soit le volume considéré, on peut donc écrire :

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho(\vec{X}, t) dV = 0 \quad (2.6)$$

En appliquant successivement (2.3) et (2.4) à l'équation précédente, on obtient l'équation locale suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.7)$$

Cette équation traduit la conservation de la masse au cours du temps dans le volume de contrôle D . Cette équation est également appelée : *équation de continuité*.

On peut encore simplifier cette équation en remarquant que pour les fluides incompressibles la masse volumique de chaque particule fluide reste constante, au cours du temps, lorsque l'on suit cette particule fluide dans son mouvement. L'équation de continuité (2.7) peut alors se simplifier et s'écrire de la façon suivante pour un fluide incompressible :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.8)$$

2.1.3 Équation de conservation de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement du fluide contenu dans un volume de contrôle D est :

$$\int_D \rho \vec{V} dV \quad (2.9)$$

On va appliquer la deuxième loi de Newton, aussi appelée loi fondamentale de la dynamique pour étudier la variation de la quantité de mouvement au cours du temps. D'après cette loi

fondamentale, la dérivée particulière de la quantité de mouvement du fluide contenu dans D au cours du temps est égale à la somme des forces extérieures qui lui sont appliquées :

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \vec{V} dV = \int_D \vec{f} dV + \int_{\Sigma} \vec{T} d\Sigma \quad (2.10)$$

Si on se restreint à notre problème, il faudrait remplacer \vec{f} par $\rho \vec{g}$ donc $\vec{f} = -\rho g \vec{e}_z$ et \vec{T} par $\bar{\sigma} \cdot \vec{n}$. Si on développe le terme $\bar{\sigma}$ on obtient : $\bar{\sigma} = -P \bar{I} + 2\mu \bar{D} + \gamma (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \bar{I}$, où $\bar{D} = \frac{1}{2} [\vec{\nabla} \vec{V} + {}^t(\vec{\nabla} \vec{V})]$. Le coefficient de viscosité de cisaillement pur (ou viscosité dynamique) est noté μ et γ le coefficient de viscosité volumique. L'hypothèse de Newton-Stokes, valable pour les liquides et les gaz monoatomiques, conduit à $\gamma = -\frac{2}{3}\mu$ selon [15].

Dans la suite, nous aurons recours au théorème de Reynolds [33] : $\frac{d}{dt} \int_D \rho \vec{V} dV = \int_D \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dV$ pour établir les équations de Navier-Stokes.

Dans le cas où $\mu = c^{ste}$, si on transforme l'intégrale de surface de l'équation (2.10) en une intégrale de volume à partir du théorème de la divergence (2.2) et que l'on applique successivement les lemmes (2.3) et (2.4), on obtient :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P + (\gamma + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.11)$$

Pour le cas d'un fluide, ou mélange de fluide, incompressible : $\frac{d\rho}{dt} = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$. On obtient la forme suivante de l'équation de Navier-Stokes que nous utiliserons dans la suite de ce travail :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.12)$$

2.1.4 Équation de conservation de l'énergie

On cherche à établir un bilan d'énergie interne U pour le fluide contenu dans le domaine D que l'on suit dans son mouvement.

On doit tenir compte de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie interne U du fluide monoconstituant, ou du fluide multiconstituant, contenu dans D . On écrit alors le premier principe de la thermodynamique, appliqué au fluide contenu dans D . Ce premier principe est énoncé de la façon suivante : la dérivée particulière, à chaque instant t , de la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie interne, est égale à la somme de la puissance mécanique P_e fournie à D par les forces extérieures (actions de contact et à distance) et de la puissance calorifique \dot{Q} fournie à D

par l'extérieur :

$$\frac{d(E_c + U)}{dt} = P_e + \dot{Q} \quad (2.13)$$

Pour obtenir un bilan sur l'énergie interne U , on introduit le théorème de l'énergie cinétique, qui se déduit de la conservation de la quantité de mouvement et s'énonce de la façon suivante : à chaque instant, la dérivée particulaire de l'énergie cinétique d'un domaine fluide D que l'on suit au cours du temps, est égale à la puissance de toutes les forces extérieures P_e et intérieures P_i appliquées à D .

En combinant le premier principe et le théorème de l'énergie cinétique et en utilisant la loi de Fourier : $\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T$, on obtient l'équation locale suivante :

$$\rho \frac{de}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + r - P \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \left(\bar{\bar{\tau}} : \vec{\nabla} \vec{V} \right) \quad (2.14)$$

Finalement, si on considère un fluide incompressible mais dilatable de conductivité thermique constante et on néglige les dissipations visqueuses au sein de la couche fluide, on aboutit à l'équation de l'énergie sous la forme simplifiée suivante :

$$\rho \frac{de}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \vec{\nabla} T \right) + r - P \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \left(\bar{\bar{\tau}} : \vec{\nabla} \vec{V} \right) \quad (2.15)$$

2.1.5 Équation de conservation des espèces

Considérons le mélange fluide comme un système composé de N espèces parfaitement miscibles et distinctes. La concentration massique ρ_k de l'espèce k , contenue dans le volume de contrôle D est définie de la façon suivante : $\rho_k = \frac{m_k}{V}$ où m_k désigne la masse de l'espèce k contenue dans le volume total V du mélange, on en déduit alors :

$$\rho = \sum_{k=1}^N \rho_k \quad (2.16)$$

Où ρ est la masse volumique du mélange.

La variation de masse de l'espèce k , contenue dans le volume de contrôle D , est produite par le flux de matière de l'espèce (k) traversant la surface Σ pour pénétrer dans D , et par la réaction chimique produisant de la masse $\dot{\omega}_k$ par unité de volume et de temps. Cette variation, valable

pour tout $k = 1..N$, s'exprime mathématiquement par la relation :

$$\int_D \frac{\partial \rho_k}{\partial t} dV = - \int_{\Sigma} \rho_k \vec{V}_k \cdot \vec{n} d\Sigma + \int_D \dot{\omega}_k dV \quad (2.17)$$

où \vec{V}_k est la vitesse moyenne locale de l'espèce (k).

On peut ignorer le terme dû aux réactions chimiques dans notre cas, d'où $\dot{\omega}_k = 0$.

En appliquant à l'équation (2.17), valable pour tout $k = 1..N$, (2.2) et le lemme (2.4), on retrouve rapidement l'équation du bilan de l'espèce (k) :

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_k \vec{V}_k) = 0 \quad (2.18)$$

On peut également reformuler cette équation en faisant intervenir le flux convectif qui apparaît si on exprime le vecteur densité de flux de diffusion massique de l'espèce (k) :

$$\vec{J}_k = \rho_k (\vec{V}_k - \vec{V}) \quad (2.19)$$

Avec $\sum_{k=1}^N \vec{J}_k = \vec{0}$.

On définit ensuite la fraction massique C_k de l'espèce (k) comme étant : $C_k = \frac{\rho_k}{\rho}$, pour tout $k = 1..N$, tel que : $\sum_{k=1}^N C_k = 1$ et on obtient à partir de l'équation (2.18) et la loi de conservation de la masse (2.7) :

$$\rho \frac{dC_k}{dt} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_k \quad (2.20)$$

Cette relation traduit la conservation de la masse de l'espèce k en l'absence de réaction chimique.

Dans le cas qui nous intéresse, on est en présence d'un fluide binaire pour lequel on tient compte de l'effet Soret (i.e. gradient de température qui induit un gradient de concentration). Le vecteur flux de matière du constituant de fraction massique C est donné par :

$$\vec{J} = -\rho D \vec{\nabla} C - \rho C (1 - C) D_T \vec{\nabla} T \quad (2.21)$$

Avec ;

– C : fraction massique du constituant le plus dense du mélange.

- D_T : coefficient de thermodiffusion.
- D : coefficient de diffusion de Fick ou coefficient de diffusion isotherme du constituant considéré dans le mélange.

Finalement, l'équation (2.20) valable pour l'espèce (k) donne dans le cas d'un mélange binaire :

$$\rho \frac{dC}{dt} = \vec{\nabla} \cdot [\rho D \vec{\nabla} C + \rho C (1 - C) D_T \vec{\nabla} T] \quad (2.22)$$

2.1.6 Approximation de Boussinesq

L'approximation que nous allons reprendre, attribuée à Boussinesq [23], a en fait été précédemment proposée par Oberbeck [98] pour la première fois en 1879. Nous reprenons ici ce que l'on entend par l'approximation de Boussinesq :

- La masse volumique ρ d'un fluide (liquide, gaz, mélange liquide ou gazeux) est considérée comme étant constante dans tous les termes des équations de conservation, c'est-à-dire $\rho(T, P) = \rho(T_0, P_0) = \rho_0 = c^{ste}$ (T_0 et P_0 sont la température et la pression de référence) sauf dans le terme générateur de la convection (c'est-à-dire dans le terme de poussée d'Archimède). Dans ce terme ρ est alors une fonction de la température et de la fraction massique : $\rho(T, C) = \rho_0 \left[1 - \beta_T (T - T_0) - \sum_k \beta_k (C_k - C_{0k}) \right]$ où :
- ρ_0 est la masse volumique à la température et aux fractions massiques de référence.
- T_0 et C_{0k} sont des valeurs de référence qui peuvent être des valeurs initiales ou des valeurs moyennes.
- k variant de 1 à N correspondant au nombre d'espèces en présence.
- β_T est le coefficient d'expansion thermique du fluide ou mélange fluide :

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{C_k} ;$$

- β_k est le coefficient d'expansion massique de l'espèce k :

$$\beta_k = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{T, C_{j \neq k}} ;$$

- Les autres propriétés thermophysiques du fluide ($\mu, \gamma, \lambda, C_p$) sont supposées constantes.

2.2 Modélisation des écoulements en milieu poreux

On désigne par milieu poreux un matériau constitué d'une matrice solide de forme complexe à l'intérieur duquel se trouvent des cavités interconnectées appelées pores. Dans la plupart des

cas, la matrice solide est rigide (ou consolidée) mais peut, dans certains cas, être légèrement déformable.

Les pores peuvent contenir une ou plusieurs phases fluides susceptibles de s'écouler et d'échanger entre elles ou avec la matrice poreuse de la matière ou de l'énergie. Dans notre étude, nous nous restreindrons aux cas d'une matrice solide non déformable, totalement remplie (saturée) par une seule phase de deux fluides totalement miscibles. De plus, nous admettons l'hypothèse qu'il n'y a pas d'échange de matière entre les phases fluides et la matrice solide.

Il existe de nombreux exemples de milieux poreux naturels (figure 2.2) comme le sable (*a*), les sols (*b* - pierre), les matériaux de construction (*c* - chaux), les aliments (*d* - pain sec), le papier ou le bois (*e*), les tissus (*f* - poumon humain). Dans l'industrie, certains milieux poreux moins compacts sont fabriqués pour leurs différentes propriétés physiques. On rencontre des milieux poreux dans de nombreux secteurs industriels tels que le génie pétrolier, le génie chimique, l'hydrogéologie, la géothermie, le génie civil et le génie médical.

Dans ce qui suit, nous définirons les différents paramètres qui apparaissent au niveau des différents modèles empiriques de description macroscopique des écoulements en milieu poreux.

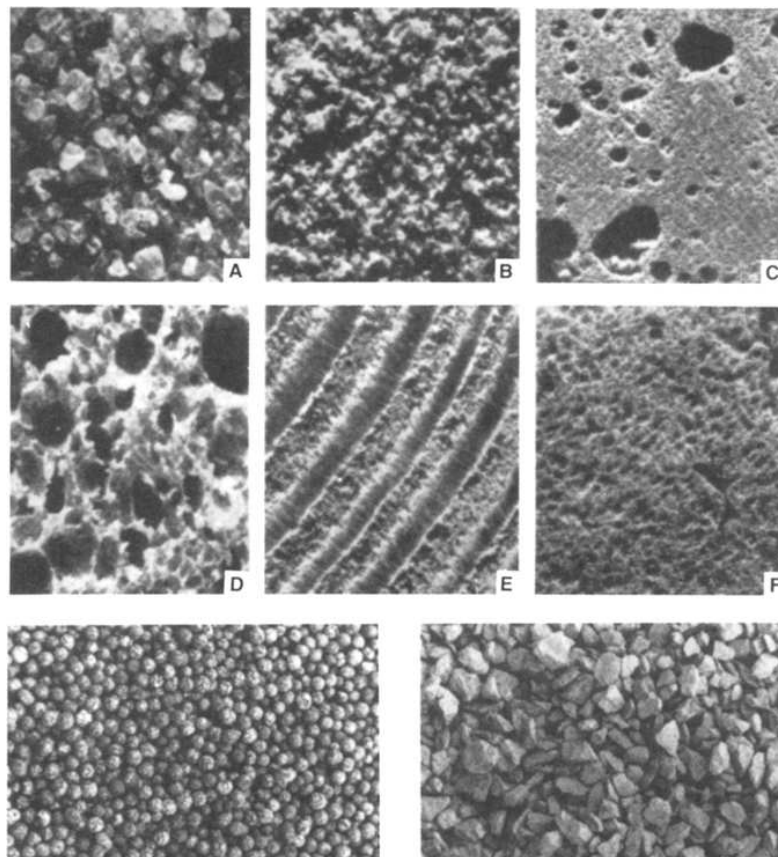


FIGURE 2.2 – Exemples de milieux poreux naturels (d'après " Convection in porous media [74]").

Les phénomènes se développant dans un milieu poreux dépendent des propriétés du fluide interstitiel mais également de la géométrie de la matrice solide. Celle-ci est caractérisée par un certain nombre de grandeurs moyennes, géométriques ou statistiques.

Nous allons présenter, de manière succincte, la démarche utilisée concernant la modélisation des écoulements et des transferts de chaleur et de masse en milieu poreux. Nous renvoyons aux travaux de Bories [17, 18], de Combarous [39] et de Nield et Bejan [95] entre autres pour plus de détails.

2.2.1 Paramètres caractérisant le milieu poreux

2.2.1.1 Volume élémentaire représentatif (V.E.R.)

Lorsqu'on étudie les écoulements en milieu poreux, deux échelles s'imposent pour la description des phénomènes [16] :

- L'échelle des pores, ou microscopique, à l'intérieur de laquelle les grandeurs locales peuvent très largement varier. En général, cette échelle est associée au diamètre moyen des pores, soit d_p .
- L'échelle du milieu poreux, ou macroscopique, caractéristique des variations significatives de ces mêmes grandeurs, définies en moyenne sur un certain volume de milieu poreux, appelé communément Volume Élémentaire Représentatif et noté V.E.R.. Cette échelle macroscopique est associée à la dimension géométrique du milieu, soit Lm .

Les grandeurs macroscopiques caractérisant le milieu poreux sont donc des moyennes des grandeurs microscopiques correspondantes, prises sur un domaine dont la taille est grande devant l'échelle de leurs fluctuations microscopiques mais ; petite devant celle des variations à l'échelle macroscopique. Ainsi, ' l ' désignant la dimension caractéristique du V.E.R., elle doit satisfaire à la double inégalité suivante : $d_p \leq l \leq Lm$. Pour effectuer le changement d'échelle (i.e. passage de l'échelle des pores à l'échelle macroscopique) plusieurs méthodes ont été proposées, dont la méthode de prise de moyenne et la méthode d'homogénéisation.

2.2.1.2 La Porosité

La porosité d'un milieu poreux, notée ϵ désigne le rapport du volume des pores sur le volume total de la matrice poreuse :

$$\epsilon = \frac{\text{Volume des pores}}{\text{Volume total du milieu poreux}} \quad (2.23)$$

Nous présentons dans le tableau (2.1) les valeurs de la porosité et de la perméabilité pour diffé-

rents matériaux poreux, tirées de l'ouvrage de Nield et Bejan [95].

2.2.1.3 La perméabilité d'un milieu poreux

La perméabilité est la propriété d'un matériau à laisser s'écouler un fluide sous pression, la perméabilité K dépend de la porosité, de la géométrie et de la porosité communicante. Plusieurs évaluations de la perméabilité K en fonction de ϵ et d'une dimension caractéristique de la matrice poreuse à l'échelle du pore ont été proposées. Les différentes expressions donnant la perméabilité dépendent de la géométrie du milieu poreux.

- La relation de Kozeny-Carman, donne une estimation de la perméabilité K pour un milieu poreux non consolidé constitué d'éléments identiques de géométrie simple :

$$K = \frac{d_p^2 \epsilon^2}{36 C_0 (1 - \epsilon)^2} \quad (2.24)$$

où d désigne une dimension caractéristique des éléments constituant la matrice poreuse (diamètre pour des billes, arrête pour des cubes. . .) et C_0 une constante dépendant de la forme des grains ($3.6 < C_0 < 5$) et en particulier $C_0 = 4.84$ pour des grains sphériques.

- Ergun, 1952, établit une expression semblable à (2.24) en considérant l'écoulement unidirectionnel d'un fluide incompressible au sein d'une colonne poreuse constituée de particules sphériques, de diamètre d , et soumise à un gradient de pression :

$$K = \frac{d_p^2 \epsilon^2}{150 (1 - \epsilon)^2} \quad (2.25)$$

ce qui correspond à une valeur de C_0 de la loi de Kozeny-Carman de 4.16.

- La modélisation des pores par des fissures capillaires de largeur w et distantes de D , conduit à une perméabilité :

$$K = \frac{w^3}{12(w + D)} = \frac{w^2}{12} \epsilon \quad (2.26)$$

- La modélisation de la matrice poreuse comme un faisceau de tubes capillaires parallèles conduit à l'expression suivante de la perméabilité :

$$K = \epsilon \frac{d_p^2}{32}, \quad \epsilon = n(\pi d_p^2)/4 \quad (2.27)$$

où n est le nombre de capillaires par unité de surface perpendiculaire au sens de l'écoulement et d_p est le diamètre des capillaires.

TABLE 2.1 – Propriétés de quelques matériaux poreux [95]

Matériau	Porosité ϵ	Perméabilité K (m^2)
Ardoise	0.56 à 0.66	4.9×10^{-14} à 4.4×10^{-13}
Brique	0.12 à 0.34	4.8×10^{-15} à 2.2×10^{-13}
Charbon	0.02 à 0.12	-
Fibre de verre	0.88 à 0.93	-
Calcaire (dolomite)	0.04 à 0.10	2×10^{-15} à 4.5×10^{-14}
Sable	0.37 à 0.50	2×10^{-11} à 1.8×10^{-10}
Grès	0.08 à 0.38	5×10^{-16} à 3×10^{-12}
Silice (en poudre)	0.37 à 0.49	1.3×10^{-14} à 5.1×10^{-14}

2.2.2 Modèles d'écoulement en milieu poreux

2.2.2.1 Équation de continuité.

La méthode de prise de moyenne permet d'établir une équivalence entre le milieu dispersé réel et le milieu continu fictif. On introduit la notion de vitesse de filtration \vec{V}^* , qui correspond à la vitesse moyenne du fluide prise sur un V.E.R..

L'équation de conservation de la masse s'écrit alors sous la forme :

$$\epsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}^*) = 0 \quad (2.28)$$

où ρ est la masse volumique du fluide saturant. Dans le cas particulier d'un fluide incompressible l'équation (2.8) se ramène à :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}^* = 0 \quad (2.29)$$

2.2.2.2 Loi de Darcy.

La formulation adoptée dans notre étude repose sur la validité de la loi de Darcy pour décrire l'écoulement au sein d'un milieu poreux. Comme nous allons le voir dans cette section, cette loi n'est valable que pour des écoulements associés à des valeurs du nombre de Reynolds de pore ($Re = \frac{V d_p}{\nu}$) inférieures à 10. Si les écarts de température imposés ne sont pas trop importants, les vitesses du fluide sont suffisamment faibles pour que les écoulements puissent être considérés comme darcéens ; la porosité des milieux poreux utilisés dans la plupart de nos études ne dépasse pas les limites de validité de cette loi.

2.2.2.3 Écoulement unidirectionnel à basse vitesse

Cette relation de Darcy traduit la proportion entre le débit à travers le milieu poreux et le gradient de pression appliqué à ce dernier (cf. figure 2.3).

Pour un échantillon de longueur L et de section S , le débit volumique Q_v , vérifie la relation :

$$Q_v = \frac{K}{\mu} S \frac{\Delta P}{L} \quad (2.30)$$

Dans la relation (2.30), μ représente la viscosité dynamique du fluide saturant la matière poreuse. Le rapport du débit volumique total par unité de surface du matériau : $\frac{Q_v}{S}$ représente la vitesse de filtration du fluide, qui correspond à la vitesse moyenne du fluide prise sur un V.E.R. Dans toute la suite de ce travail, nous noterons \vec{V} cette vitesse de filtration.

Cette vitesse de filtration, \vec{V} , vitesse macroscopique, est à distinguer de la vitesse interstitielle, notée \vec{V}_p qui correspond à une vitesse moyenne du fluide dans les pores.

Cette vitesse réelle \vec{V}_p à l'intérieur des pores peut être très supérieure à \vec{V} , car seule une partie du volume total du matériau poreux est disponible pour le transport du fluide.

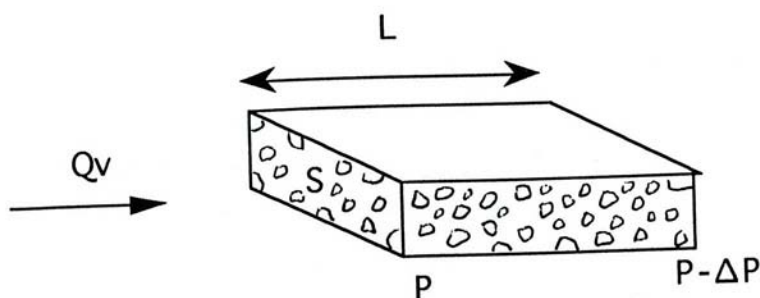


FIGURE 2.3 – Une représentation schématique de l'écoulement de la loi de Darcy dans un milieu poreux.

2.2.2.4 Équation de Darcy généralisée

A trois dimensions, l'équation (2.30) se généralise, pour un milieu isotrope en présence du champ de gravité à :

$$\vec{V} = -\frac{K}{\mu} \left(\vec{\nabla} P - \rho \vec{g} \right) \quad (2.31)$$

où ρ désigne la masse volumique du fluide saturant le milieu poreux.

2.2.2.5 Nombre de Reynolds de pore

Pour les écoulements en milieu poreux, on définit un nombre de Reynolds de pore basé sur la vitesse interstitielle \vec{V}_p et une longueur d , caractéristique de la dimension des pores soit :

$$Re = V_p \frac{d}{\nu} \quad (2.32)$$

où $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ désigne la viscosité cinématique du fluide. On prend souvent $d = K^{1/2}$, pour le calcul du nombre de Reynolds de pore. On distingue plusieurs régimes d'écoulement suivant la valeur de Re . Le régime est laminaire stationnaire pour les faibles valeur de Re de pore ($Re < 1$). Si l'on augmente Re de pore, l'écoulement devient instationnaire puis chaotique pour $Re > 300$.

2.2.3 Transfert de chaleur en milieu poreux

Tout comme l'équation de Darcy décrivant l'écoulement du fluide au sein du milieu poreux, l'équation de l'énergie, traduisant le transfert de chaleur dans le milieu poreux fait appel au concept de milieu continu fictif, équivalent au milieu poreux réel.

Pour établir l'équation de transfert de chaleur, la démarche est la suivante :

- Formulation des équations microscopiques à l'échelle du pore.
- Prises de moyennes effectuées sur les équations microscopiques qui permettent le passage de l'échelle du pore à celle du milieu homogène.

Avant de formuler ces équations de description du transfert de chaleur nous précisons les hypothèses adoptées :

- Les termes de dissipation visqueuse sont supposés négligeables, hypothèse justifiée si les vitesses de filtration restent relativement faibles.
- Les caractéristiques thermiques des phases solide et fluide telles que les capacités calorifiques volumiques et les conductivités thermiques, sont supposées constantes et donc indépendantes de la température.

A l'échelle du pore, le système décrivant le transfert de chaleur est le suivant :

En tout point M du milieu poreux, à l'exception de la surface de contact entre le solide et le fluide, la loi de Fourier s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\rho c)_i T_i] + \vec{\nabla} \cdot [(\rho c)_i T_i \vec{V}_i] = \vec{\nabla} \cdot (\lambda_i \vec{\nabla} T_i) \quad (2.33)$$

où $i = f$ si M appartient à la phase fluide et $i = s$ s'il appartient à la phase solide. On a donc $\vec{V}_s = 0$ et \vec{V}_f désigne la vitesse locale du fluide à l'échelle du pore.

Les conditions aux limites associées à l'interface solide-fluide, sont les suivantes :

$$\begin{cases} T_s = T_f \\ \left(\lambda_s \vec{\nabla} T_s \right) \cdot \vec{n} = \left(\lambda_f \vec{\nabla} T_f \right) \cdot \vec{n} \\ \vec{V}_f = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

où \vec{n} désigne le vecteur normal à l'interface, λ_i la conductivité thermique de la phase i et $(\rho c)_i$ la capacité calorifique volumique de la phase i .

Après avoir écrit ces équations à l'échelle microscopique, on définit des grandeurs moyennes qui permettent de décrire le transfert de chaleur à l'échelle du milieu homogène par l'équation classique des milieux continus fluides à savoir :

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\rho c)_m T_m] + \vec{\nabla} \cdot [(\rho c)_m T_m \vec{V}_m] = \vec{\nabla} \cdot (\lambda_m \vec{\nabla} T_m) \quad (2.35)$$

La détermination de ces grandeurs moyennes, $(\rho c)_m$, T_m , λ_m s'effectue alors par identification de l'équation (2.15) avec celles obtenues par prises de moyenne sur un V.E.R., des équations (2.13) [83, 38].

Cette identification conduit aux relations suivantes :

$$(\rho c)_m = \epsilon (\rho c)_f + (1 - \epsilon) (\rho c)_s \quad (2.36)$$

$$\vec{V}_m = \frac{(\rho c)_f}{(\rho c)_m} \vec{V} \quad (2.37)$$

où \vec{V} est la vitesse de filtration.

2.2.3.1 Les deux modes de description adoptés

Deux modèles de description du transfert de chaleur en milieu poreux sont alors proposés [38, 40] selon que l'on retienne l'une des deux hypothèses suivantes :

- La première utilise le concept de conductivité thermique globale équivalente.
- La seconde conduit à distinguer les températures moyennes des phases solide et fluide et à introduire un coefficient d'échange fini entre les deux phases.

Concept de conductivité thermique équivalente

Cette hypothèse qui assimile le milieu poreux à un milieu fictif unique consiste à admettre que dans tout le volume élémentaire sur lequel on effectue un bilan énergétique, les températures

moyennes des phases solide \bar{T}_s et fluide \bar{T}_f sont égales soit :

$$\bar{T}_s = \bar{T}_f = T \quad (2.38)$$

Cette hypothèse, qui implique un coefficient de transfert infini entre les deux phases, conduit à l'équation de l'énergie suivante analogue à (2.15) :

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\rho c)^* T] + \vec{\nabla} \cdot [(\rho c)_f T \vec{V}] = \vec{\nabla} \cdot (\lambda^* \vec{\nabla} T) \quad (2.39)$$

où \vec{V} est la vitesse de filtration.

$(\rho c)^* = \epsilon (\rho c)_f + (1 - \epsilon) (\rho c)_s$ est la capacité calorifique volumique du milieu poreux équivalent.

λ^* est la conductivité thermique globale, elle dépend, de manière complexe, des conductivités des phases solide et fluide et de la texture du milieu poreux.

De nombreux modèles de conductivité thermique ont été développés qui permettent l'estimation de λ^* , tels que $\lambda^* = (1 - \epsilon) \lambda_s + \epsilon \lambda_f$ ou $\frac{1}{\lambda^*} = \frac{\epsilon}{\lambda_f} + \frac{1-\epsilon}{\lambda_s}$ dans le cas de milieux poreux constitués par des éléments très réguliers tels que des sphères, par exemple. Mais il est généralement indispensable de recourir à la détermination expérimentale pour une évaluation précise de λ^* .

Emploi du coefficient de transfert fini entre les phases solide et fluide.

Cette hypothèse consiste à distinguer les températures moyennes des phases solide \bar{T}_s et fluide \bar{T}_f définies au paragraphe précédent, moyennes prises dans un volume élémentaire de référence. On introduit un coefficient d'échange, h , fini entre les deux phases [39]. Le milieu est alors considéré comme équivalent à deux milieux continus.

Le modèle mathématique correspondant comprend deux équations de transfert de chaleur obtenues en faisant un bilan énergétique propre à chacune des phases :

Pour la phase fluide :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\epsilon (\rho c)_f \bar{T}_f] + \vec{\nabla} \cdot [(\rho c)_f \bar{T}_f \vec{V}] = \vec{\nabla} \cdot (\lambda_f \vec{\nabla} T) + h (\bar{T}_s - \bar{T}_f) \quad (2.40)$$

Pour la phase solide :

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1 - \epsilon) (\rho c)_s \bar{T}_s] = \vec{\nabla} \cdot (\lambda_s \vec{\nabla} T) + h (\bar{T}_f - \bar{T}_s) \quad (2.41)$$

Ce système d'équations (2.40) et (2.41) introduit la quantité de chaleur transmise par le fluide au solide sous la forme : $h (\bar{T}_f - \bar{T}_s)$. Le coefficient h n'est pas constant et ses variations ne sont pas a priori connues.

Choix entre les deux modèles

Le premier modèle (2.39) est le plus couramment utilisé dans la littérature. Il est satisfaisant pour décrire le transfert de chaleur au sein d'un milieu poreux lorsque les vitesses de filtration sont faibles. Il est de plus, considéré comme le plus acceptable pour les milieux poreux de faible granulométrie.

Le deuxième modèle (2.40) et (2.41) est utile lorsque les vitesses de filtration sont importantes (mouvements convectifs développés) ainsi que les écarts initiaux de températures entre les deux phases. Cependant, ce modèle est difficile à utiliser vu les difficultés rencontrées pour l'estimation, en particulier du coefficient d'échange convectif h . La détermination expérimentale du coefficient d'échange h reste difficile.

2.2.4 Transfert de masse

Nous nous intéressons ici au transport de chacun des constituants d'un mélange fluide saturant un milieu poreux. En tenant compte du fait que le transfert de matière ne s'effectue qu'à travers la phase fluide, l'équation de conservation de la masse de chacun des constituants est obtenue, par prise de moyenne sur un volume élémentaire représentatif, lorsqu'il n'y a pas de production interne. Elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\rho \left[\epsilon \frac{\partial C_k}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) C_k \right] = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{J}_k) \quad k = 1..N - 1 \quad (2.42)$$

N est le nombre total des constituants, $C_k = \frac{\rho_k}{\rho}$ est la fraction massique du $k^{\text{ième}}$ constituant et $\rho = \sum_k \rho_k$. Dans le cas d'une matrice poreuse saturée par un fluide binaire, les coefficients de diffusion moléculaire D^* et D_T^* intervenant dans le vecteur densité de flux massique \vec{J}_k dépendent des propriétés du milieu poreux. Différents travaux [10, 84] ont montré que le coefficient de diffusion moléculaire équivalent D^* est similaire à celui présent dans l'expression du flux de diffusion massique en milieu fluide avec une dépendance par rapport à la tortuosité du milieu de la forme $D^* = \frac{D}{\tau^2}$. Ces auteurs proposent une relation analogue pour le coefficient de thermodiffusion, soit $D_T^* = \frac{D_T}{\tau^2}$. D'autres relations permettent d'évaluer ces coefficients équivalents, mais la meilleure méthode pour déterminer les coefficients D^* et D_T^* reste la mesure directe dans le milieu poreux étudié.

Les coefficients D et D^* peuvent d'autre part être considérés constants lorsqu'on néglige les phénomènes de dispersion. Pour un fluide binaire, ce vecteur densité de flux massique \vec{J}_1 de l'un des constituants ayant la fraction massique C est de la forme :

$$\vec{J}_1 = -\rho D^* \vec{\nabla} C - \rho C(1 - C) D_T^* \vec{\nabla} T \quad (2.43)$$

Notons que dans ces conditions la valeur du coefficient de Soret S_T , rapport de ces deux coefficients de diffusion, reste identique en milieux poreux à celle obtenue en milieu libre. Cette hypothèse a été vérifiée expérimentalement par ([41], [105]) jugent aussi plus prudent de mesurer cette valeur expérimentalement.

Chapitre 3

Prise en compte des caractéristiques thermiques et géométriques des parois

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous étudions l'influence des caractéristiques des parois sur la naissance de la convection en milieu poreux saturé par un mélange binaire. La couche poreuse est délimitée par des plaques minces de même épaisseur et soumises à un flux de chaleur constant et uniforme. Ces parois sont de même conductivité thermique. En outre, la conductivité des plaques est généralement différente de la conductivité de la couche poreuse. Les parois verticales sont adiabatiques et imperméables à la matière. Le problème est gouverné par sept paramètres adimensionnels qui sont : la porosité normalisée du milieu, ϵ , le rapport de l'épaisseur des plaques sur celle de l'épaisseur de la couche poreuse, δ , et leur rapport de conductivité thermique, d , le facteur de séparation, ψ , le nombre de Lewis, Le , et le nombre de Rayleigh thermique, Ra . La stabilité de la solution d'équilibre est étudiée analytiquement et numériquement dans le cas d'une cellule d'extension infinie. La solution d'équilibre trouvée perd sa stabilité via une bifurcation stationnaire ou une bifurcation de Hopf en fonction des valeurs des paramètres adimensionnels. Pour les grandes longueurs d'onde, le nombre de Rayleigh critique obtenu est

$$Ra_{cs} = \frac{12(1 + 2d\delta)}{1 + \psi(2Le d\delta + Le + 1)} \text{ pour } \psi > \psi_{mono} > 0.$$

3.1 Introduction

Le mouvement des fluides dans les milieux poreux a été largement étudiée en raison de ses nombreuses applications fondamentales et industrielles. Les revues récentes et les publications dans ce domaine sont données dans les livres de Nield et Bejan [95], Ingham et Pop [64], Vafai [127] et plus récemment de Vadász [126].

3.1.1 Convection en présence d'effet Soret, sans prise en compte des caractéristiques des parois

La stabilité linéaire de la solution d'équilibre dans le cas d'un mélange binaire saturant un milieu poreux, en présence d'un gradient de température et avec prise en compte de l'effet Soret, a été étudiée par Ouarzazi et Bois [100]. dans le cas particulier où le gradient de température est supposé varier périodiquement en fonction du temps. Les auteurs ont constaté que l'instabilité sous harmonique est toujours la première instabilité rencontrée. Le voisinage du point de codimension 2 a également été étudié dans le cas de faibles fréquences. Sovran et al. [123] ont étudié l'apparition de la convection dans une couche poreuse horizontale, saturée par un fluide binaire et avec prise en compte de l'effet Soret. Pour une cellule chauffée par le bas et selon la valeur du facteur de séparation, ils ont montré analytiquement puis numériquement que la solution perd sa stabilité via une bifurcation stationnaire ou une bifurcation de Hopf. En développant les perturbations sous forme de puissances entières du nombre d'onde k au voisinage de $k = 0$, ils ont obtenu les paramètres critiques $Ra_c = 12/(Le\psi)$, $k_c = 0$ pour $\psi \geq \psi_{mono} = 1/[(40/51)Le - 1]$.

Knobloch et Moore [72] ont utilisé la théorie de la stabilité linéaire pour étudier le déclenchement de la convection thermosolutale induite dans une couche fluide horizontale. Les parois inférieure et supérieure de la cellule sont rigides. Ils ont envisagé deux types de conditions aux limites : des températures constantes sur les parois inférieure et supérieure ; un flux de chaleur imposé sur la paroi inférieure et une température constante sur la paroi supérieure. Les seuils et les longueurs d'ondes associés aux écoulements convectifs oscillants et stationnaires ont été déterminés en fonction du facteur de séparation. Platten et al. [104] ont étudié analytiquement et expérimentalement la naissance et le développement de la convection thermosolutale dans une cavité rectangulaire de grande extension, inclinée par rapport à la verticale d'un angle θ . Ils ont montré, pour un mélange binaire eau (60.88 wt %, ethanol 39.12 wt %) que le maximum de séparation avait lieu $\theta \approx 88^\circ$, soit pour une cellule pratiquement horizontale.

Ce problème a été aussi étudié par Bourich et al. [22] en considérant non seulement une cavité poreuse horizontale, mais aussi une cavité remplie d'un fluide. Le passage entre la formulation en milieu poreux saturé par un fluide binaire et un fluide binaire, a été obtenu en utilisant le modèle de Brinkman-Hazen-Darcy dans sa forme transitoire. Les nombres de Rayleigh critiques associés au le déclenchement de la convection stationnaire et oscillatoire ont été déterminés explicitement comme fonctions des paramètres régissant le problème pour une couche infinie. À l'apparition de l'instabilité, ils ont constaté que le nombre d'onde est égal à zéro alors que pour nos conditions aux limites le nombre d'onde est égal à zéro seulement dans une gamme particulière des valeurs du facteur de séparation. Ils ont également montré la dépendance des paramètres critiques en fonction de la porosité normalisée.

Shevtsova et al. [119] ont réalisé des simulations numériques tridimensionnelles, pour étudier la convection induite par l'effet Soret dans un cube rempli par un mélange binaire d'eau à 90% et d'isopropanol à 10%. Les mêmes auteurs, dans [120] ont étudié les instabilités qui se produisent

dans ce fluide binaire avec un coefficient de Soret négatif et pour une cavité chauffée par le haut, c'est à dire thermiquement stable dans la configuration de Rayleigh-Benard.

Alonso et al. [3] se sont intéressés numériquement à l'influence du confinement de la cellule sur la naissance de la convection thermosolutale en configuration de Benard. Dans Alonso et al. [4], les auteurs ont présenté les résultats des simulations numériques directes de la convection dans des fluides binaires pour de grand rapport d'aspect de la cellule. Ils se sont intéressés à des mélanges binaires avec des valeurs de facteur de séparation négatives, pour lesquels la bifurcation primaire est sous-critique et donne naissance à une solution oscillante. Jung et Lücke [67] ont étudié par des simulations numériques directes, les structures convectives stationnaires localisées dans les mélanges de fluides binaires avec un facteur de séparation faible et négatif.

L'analyse de la stabilité linéaire et non linéaire de la convection double-diffusive, pour un fluide viscoélastique avec prise en compte de l'effet Soret dans un milieu poreux, a été étudiée par Wang et al. [130] en utilisant un modèle modifié-Maxwell-Darcy. Les auteurs ont utilisé l'analyse de stabilité linéaire pour examiner comment le coefficient de Soret et le temps de relaxation du fluide viscoélastique affectent le déclenchement de la convection. Ils ont montré qu'une augmentation de la valeur du temps de relaxation renforce l'instabilité du système et que les effets positifs ou négatifs du coefficient Soret tendent à déstabiliser le système en cas de mode oscillant. À partir de l'analyse de la stabilité non linéaire, ils ont constaté que le nombre de Nusselt diminue avec l'augmentation du temps de relaxation ou avec une diminution du coefficient Soret.

3.1.2 Convection thermique avec prise en compte des caractéristiques des parois

Sparrow et al. [124] ont cherché à déterminer les conditions qui engendrent le déclenchement de la convection dans une couche fluide horizontale dans laquelle un gradient de température vertical descendant est maintenue au sein de la couche. Dans de tels cas, le liquide le plus dense est situé au dessus du moins dense. Les auteurs ont tenu compte d'une variété de conditions aux limites thermiques et hydrodynamiques au niveau des surfaces qui délimitent la couche fluide. Ils ont constaté que le nombre de Rayleigh conduisant à la naissance de la convection est plus grand pour les conditions aux limites isothermes et décroît de façon monotone quand on s'approche des conditions de flux de chaleur donné. Hurle et al. [63] ont formulé le problème Rayleigh-Benard en hydrodynamique dans les conditions où les parois délimitant le fluide ont une diffusivité thermique finie. Leurs calculs montrent qu'il y a une réduction importante du nombre de Rayleigh critique à la naissance de la convection. Les auteurs ont montré que leur théorie, qui revêt une importance particulière pour les métaux liquides, prévoit que le nombre de Rayleigh critique correspondant à la naissance de la convection dans une cellule de Benard avec des parois rigides diminue de 1707.762, quand les parois sont parfaitement conductrices à 720.000 lorsqu'elles ne sont pas conductrices.

Riahi [113] a considéré une configuration où une couche poreuse est prise en sandwich entre deux parois conductrices imperméables de hauteur infinie. Il a effectué une analyse de stabilité faiblement non linéaire et a constaté qu'il y a une région dans l'espace des paramètres dans laquelle les rouleaux bidimensionnels constituent la structure convective la plus attractive. La structure privilégiée est associée à des cellules carrées. Une analyse plus approfondie de ce type de problème peut être trouvée dans Mojtabi et Rees [89] et Rees et Mojtabi [112].

Mojtabi et Rees [89] ont effectué une étude analytique et numérique de la convection naturelle dans une cavité poreuse horizontale saturée par un fluide. La cavité considérée par ces auteurs est délimitée par des plaques horizontales minces avec une épaisseur uniforme dont les surfaces extérieures sont soumises à un flux de chaleur constant. Ils ont trouvé que le critère de déclenchement de la convection dépend fortement de l'épaisseur relative des plaques et de la couche poreuse, δ , et de leurs conductivités relatives, d . D'un point de vue pratique, ces auteurs montrent qu'il est essentiel de déterminer l'effet combiné de l'épaisseur relative des plaques délimitant la couche poreuse, du rapport des conductivités des plaques et du milieu poreux. Dans certaines régions de l'espace des paramètres, un petit changement dans une de ces valeurs causerait des grands changements des paramètres critiques associés à la transition. Physiquement, ils expliquent cela par le fait que le flux de chaleur qui résulte de la présence de mouvements convectifs dans la couche poreuse peut ou pas redistribué par la conduction horizontale dans les plaques qui délimitent la couche. Rees et Mojtabi [112] ont prolongé la précédente étude. Ils ont cherché à déterminer la nature de l'écoulement convectif post-critique en fonction des épaisseurs et des conductivités des plaques délimitant la couche poreuse.

L'objectif principal de ce chapitre est de déterminer l'influence des plaques délimitant une couche poreuse horizontale saturée par un mélange binaire. Sur la nature des mouvements convectifs, une attention particulière est portée sur l'influence du rapport des conductivités thermiques et du rapport des épaisseurs.

3.2 Formulation mathématique

On considère une cavité rectangulaire de rapport d'aspect $A = L/H$, où H , est la hauteur de la cavité et L sa longueur, la profondeur de la cavité est supposée infinie (Fig. 3.1). Cette cavité rectangulaire est remplie d'un milieu poreux de perméabilité K , de porosité ϵ , saturé par un mélange binaire. L'origine du système de coordonnées est située au bas et à gauche de la cavité poreuse avec x' et y' , les coordonnées horizontales et verticales respectivement. La cavité est placée entre deux plaques métalliques d'épaisseur uniforme h . Des conditions aux limites de Neumann pour la température (c'est-à-dire flux de chaleur imposé), q' sont appliquées sur les surfaces extérieures horizontales de la couche à $y' = -h$ et à $y' = H + h$. Les parois verticales ($x' = 0$, $x' = L$) sont imperméables et adiabatiques. Toutes les parois sont rigides.

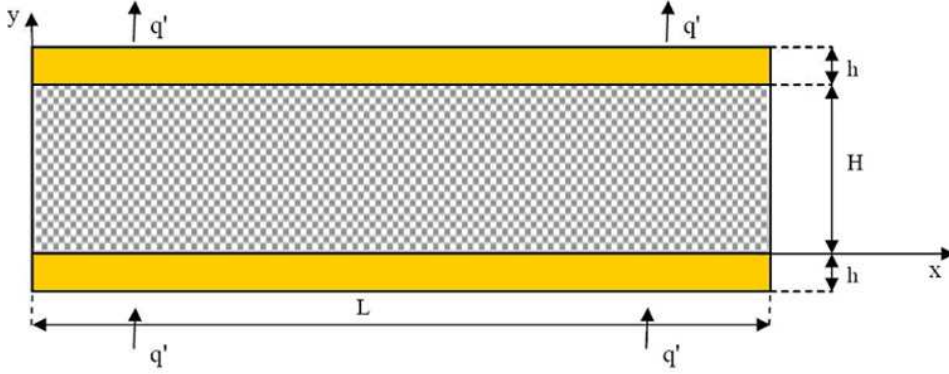


FIGURE 3.1 – Couche poreuse d'épaisseur H et de longueur L , délimitée par deux plaques horizontales d'épaisseur h et saturée par un fluide binaire.

Nous considérons que la couche poreuse est homogène et isotrope et on admet que l'approximation de Darcy-Oberbeck-Boussinesq est valable. Les propriétés thermophysiques du fluide binaire sont supposées constantes, à l'exception de la masse volumique du fluide au niveau du terme générateur de la convection. Nous prendrons ici une masse volumique du fluide binaire variant linéairement en fonction de la température et de la fraction massique :

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta_T (T - T_0) - \beta_C (C - C_0)] \quad (3.1)$$

Où β_T et β_C sont respectivement les coefficients d'expansion thermique et massique du fluide binaire. Ils sont donnés par :

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_C > 0 \quad \beta_C = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_T < 0 \quad (3.2)$$

T représente la température au sein de milieu et C , la fraction massique du constituant le plus lourd. T_0 et C_0 correspondent à l'état de référence. On utilise aussi l'hypothèse d'équilibre thermique local, et on néglige le terme de dissipation visqueuse.

Ce problème est régi par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement modélisée par l'équation de Darcy et les équations de conservation de l'énergie et des espèces, qui s'écrivent pour le milieu poreux saturé par le fluide binaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi' = -\frac{gK\beta_T}{\nu} \frac{\partial}{\partial x'} \left(T_2' + \frac{\beta_C}{\beta_T} C' \right) \\ (\rho c)_p \frac{\partial T_2'}{\partial t'} + (\rho c)_f \vec{V}' \cdot \vec{\nabla} T_2' = -\vec{\nabla} \cdot (-\lambda_p \vec{\nabla} T_2') \\ \rho_0 \left(\epsilon^* \frac{\partial C'}{\partial t'} + \vec{V}' \cdot \vec{\nabla} C' \right) = -\vec{\nabla} \cdot \left[-\rho_0 D^* \vec{\nabla} C' - \rho_0 C_0 (1 - C_0) D_T^* \vec{\nabla} T_2' \right] \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Où \vec{V}' est la vitesse de filtration, T'_2 la température à l'intérieur de la cavité poreuse, $\vec{g} = -g\vec{e}_y$ est l'accélération de la pesanteur, ν la viscosité cinématique, $(\rho c)_p$ et $(\rho c)_f$ sont respectivement la capacité calorifique effective par unité de volume du milieu poreux et celle du fluide, λ_p est la conductivité thermique effective du milieu poreux saturée, et ϕ' est la fonction de courant. L'équation de continuité est satisfaite en introduisant la fonction du courant ϕ' définie par : $u' = \partial\phi'/\partial y'$ et $v' = -\partial\phi'/\partial x'$.

Pour les deux plaques qui délimitent le milieu poreux, nous avons :

$$\begin{cases} (\rho c)_s \frac{\partial T'_1}{\partial t'} = \lambda_s \nabla^2 T'_1 \\ (\rho c)_s \frac{\partial T'_3}{\partial t'} = \lambda_s \nabla^2 T'_3 \end{cases} \quad (3.4)$$

T'_1 et T'_3 sont les températures à l'intérieur des plaques inférieure et supérieure respectivement, $(\rho c)_s$ et λ_s désignent la capacité calorifique par unité de volume et la conductivité thermique des plaques métalliques. Nous supposons que les plaques délimitant la couche poreuse sont faites de la même matière et sont d'épaisseur identique. Les conditions aux limites appliquées sur les frontières horizontales du système sont des flux de chaleur uniformes par unité de surface, q' . Nous supposons que les parois verticales de la cavité sont thermiquement isolées et imperméables. Nous avons donc :

- Pour la plaque inférieure,

$$\begin{aligned} \text{pour } y' = -h, \quad & -\lambda_s \frac{\partial T'_1}{\partial y'} = q' \\ \text{pour } y' = 0, \quad & \lambda_s \frac{\partial T'_1}{\partial y'} = \lambda_p \frac{\partial T'_2}{\partial y'} \end{aligned}$$

- Pour la cavité poreuse,

$$\begin{aligned} \text{pour } y' = 0, \quad T'_1 = T'_2, \quad & \frac{\partial C'}{\partial y'} + \frac{D_T^*}{D^*} C_0 (1 - C_0) \frac{\partial T'_2}{\partial y'} = 0 \\ \text{pour } y' = H, \quad T'_2 = T'_3, \quad & \frac{\partial C'}{\partial y'} + \frac{D_T^*}{D^*} C_0 (1 - C_0) \frac{\partial T'_2}{\partial y'} = 0 \end{aligned}$$

- Pour la plaque supérieure,

$$\begin{aligned} \text{pour } y' = H, \quad & \lambda_p \frac{\partial T'_2}{\partial y'} = \lambda_s \frac{\partial T'_3}{\partial y'} \\ \text{pour } y' = H + h, \quad & -\lambda_s \frac{\partial T'_3}{\partial y'} = q' \end{aligned}$$

- Pour

$$x = 0 \text{ et } x = A, \forall y, \quad \phi' = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial T_2}{\partial x} = 0$$

3.2.1 Formulation adimensionnelle du problème et conditions aux limites

3.2.1.1 Choix des grandeurs de référence.

D'abord, on remplace le groupement variable $C(1 - C)$ par $C_0(1 - C_0)$ en faisant l'hypothèse que le terme $C(1 - C)$ présent dans l'équation de conservation des espèces varie peu par rapport à $C_0(1 - C_0)$, C_0 désignant la fraction massique à l'état initial. Ceci suppose que les variations de la température et de la fraction massique restent faibles par rapport à l'état de référence.

Dans cette étude les variables sont rendues sans dimension par les grandeurs de référence suivantes : H pour les longueurs, $\frac{a}{H}$ pour la vitesse avec $a = \frac{\lambda_p}{(\rho c)_f}$ (où a est la diffusivité thermique équivalente), $\frac{\sigma H^2}{a}$ pour le temps (avec $\sigma = \frac{(\rho c)_p}{(\rho c)_f}$, le rapport de capacité de chaleur volumiques), $\Delta T = \frac{q' H}{\lambda_p}$ pour la température, $\Delta C = -\Delta T C_0(1 - C_0) \frac{D_T^*}{D^*}$ pour la fraction massique, où D_T^* et D^* sont respectivement, les coefficients de thermodiffusion et de diffusion massique du constituant le plus lourd.

3.2.1.2 Système d'équations adimensionnelles

Le problème est régi par le système d'équations adimensionnelles suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi = -Ra \frac{\partial}{\partial x} (T_2 + \psi C) \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T_2 = \nabla^2 T_2 \\ \epsilon \frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} C = \frac{1}{Le} (\nabla^2 C - \nabla^2 T_2) \\ \frac{\partial T_1}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T_1 \\ \frac{\partial T_3}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T_3 \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Le problème considéré dépend ainsi de huit paramètres adimensionnels : le nombre de Rayleigh thermique, $Ra = \frac{K g H \beta_T \Delta T}{\alpha \nu}$, le facteur de séparation $\psi = -\frac{\beta_C D_T^*}{\beta_T D^*} C_0(1 - C_0)$, le nombre

de Lewis $Le = \frac{a}{D^*}$, la porosité normalisée $\epsilon = \frac{\epsilon^*}{\sigma}$, le rapport de diffusivité thermique $\alpha = \frac{a_s}{a_p}$ où $a_s = \frac{\lambda_s}{(\rho c)_s}$ et $a_p = \frac{\lambda_p}{(\rho c)_p}$ sont respectivement la diffusivité thermique des plaques métalliques et du milieu poreux, le rapport de conductivité thermique $d = \frac{\lambda_s}{\lambda_p}$ et le rapport de l'épaisseur des parois sur l'épaisseur de la couche poreuse $\delta = \frac{h}{H}$.

3.2.1.3 Conditions aux limites adimensionnelles

Le nouveau problème mathématique que nous venons de définir nécessite un certain nombre de conditions aux limites pour être résolu. Nous allons donc reprendre les conditions aux limites établies dans le cas dimensionnel et introduire les variables adimensionnelles citées précédemment. On est conduit aux conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{pour } y = -\delta, \quad & \frac{\partial T_1}{\partial y} = -\frac{\lambda_p}{\lambda_s} = -\frac{1}{d}; \\
 \text{pour } y = 0, \quad & \frac{\partial T_1}{\partial y} = \frac{1}{d} \frac{\partial T_2}{\partial y} \quad T_1 = T_2, \quad \phi = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial T_2}{\partial y} = 0; \\
 \text{pour } y = 1, \quad & \frac{\partial T_3}{\partial y} = \frac{1}{d} \frac{\partial T_2}{\partial y} \quad T_2 = T_3, \quad \phi = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial T_2}{\partial y} = 0; \\
 \text{pour } y = 1 + \delta, \quad & \frac{\partial T_1}{\partial y} = -\frac{1}{d}; \\
 \text{pour } x = 0 \text{ et } x = A, \forall y, \quad & \phi = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial T_2}{\partial x} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

3.3 Stabilité linéaire de la solution d'équilibre

3.3.1 Stabilité linéaire de la solution d'équilibre dans le cas d'une cellule horizontale infinie.

Il est facile de démontrer qu'il existe une solution d'équilibre mécanique pour ce problème caractérisée par :

$$\begin{aligned}
 \phi = 0, \quad T_{1,0} &= -\frac{y}{d} + T_a, \quad T_{2,0} = T_a - y; \\
 T_{3,0} &= \frac{(1-y)}{d} + T_a - 1, \quad C_0 = y - \frac{1}{2}.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

où T_a est une constante arbitraire, égale à la valeur prise par la paroi la plus chaude $T_{1,0}(x, y = 0) = T_{2,0}(x, y = 0) = T_a$

3.3.1.1 Équations de stabilité linéaire

Pour étudier la stabilité linéaire de la solution d'équilibre définie par (3.7), nous perturbons cette solution de base en introduisant des perturbations infinitésimales, notées $\varphi(x, y, t)$ pour la fonction de courant, $\theta_1(x, y, t)$, $\theta_2(x, y, t)$, $\theta_3(x, y, t)$ pour les températures et $c(x, y, t)$ pour la fraction massique. Ces perturbations infinitésimales sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, y, t) = \phi(x, y, t) - \phi_0(x, y) \\ \theta_1(x, y, t) = T_1(x, y, t) - T_{0,1}(x, y) \\ \theta_2(x, y, t) = T_2(x, y, t) - T_{0,2}(x, y) \\ \theta_3(x, y, t) = T_3(x, y, t) - T_{0,3}(x, y) \\ c(x, y, t) = C(x, y, t) - C_0(x, y) \end{array} \right. \quad (3.8)$$

où φ , T_1 , T_2 , T_3 et C sont les champs perturbés.

Si on introduit l'expression des quantités perturbées, définies ci-dessus, dans le système adimensionnel (3.7) et que l'on néglige les termes du second ordre, on obtient alors les équations aux perturbations linéarisées suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi = -Ra \frac{\partial}{\partial x} (\theta_2 + \psi c) \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \nabla^2 \theta_2 \\ \epsilon \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{Le} (\nabla^2 c - \nabla^2 \theta_2) \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \alpha \nabla^2 \theta_1 \\ \frac{\partial \theta_3}{\partial t} = \alpha \nabla^2 \theta_3 \end{array} \right. \quad (3.9)$$

avec les conditions aux limites associées suivantes :

$$\begin{aligned}
 &\text{pour } y = -\delta, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = 0; \\
 &\text{pour } y = 0, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = \frac{1}{d} \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \quad \theta_1 = \theta_2, \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = 0; \\
 &\text{pour } y = 1, \quad \frac{\partial \theta_3}{\partial y} = \frac{1}{d} \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \quad \theta_2 = \theta_3, \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = 0; \\
 &\text{pour } y = 1 + \delta, \quad \frac{\partial \theta_3}{\partial y} = 0; \\
 &\text{pour } x = 0 \text{ et } x = A, \forall y, \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

On rappelle que $\frac{\partial \theta_2}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial y}$ provient de la condition aux limites de flux de matière nul $\vec{J} \cdot \vec{n} = 0$ sur les parois en $y = 0$ et $y = 1$.

Afin de faciliter l'étude de la stabilité linéaire, nous introduisons la variable $\eta = c - \theta_2$ en remplacement de la perturbation de concentration c . En introduisant la nouvelle fonction inconnue η , le système (3.9) prend la forme suivante :

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\nabla^2 \varphi + Ra \frac{\partial}{\partial x} [\theta_2(1 + \psi) + \psi \eta] = 0 \\
 &\frac{\partial \theta_2}{\partial t} - \nabla^2 \theta_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\
 &\epsilon Le \frac{\partial(\eta + \theta_2)}{\partial t} - \nabla^2 \eta + \frac{\partial \varphi}{\partial x} Le = 0 \\
 &\frac{\partial \theta_1}{\partial t} - \alpha \nabla^2 \theta_1 = 0 \\
 &\frac{\partial \theta_3}{\partial t} - \alpha \nabla^2 \theta_3 = 0
 \end{aligned} \right. \tag{3.11}$$

Le système (3.11) admet comme nouvelles conditions aux limites :

$$\begin{aligned}
 &\text{pour } y = -\delta, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = 0; \\
 &\text{pour } y = 0, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = \frac{1}{d} \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \quad \theta_1 = \theta_2, \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0; \\
 &\text{pour } y = 1, \quad \frac{\partial \theta_3}{\partial y} = \frac{1}{d} \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \quad \theta_2 = \theta_3, \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0; \\
 &\text{pour } y = 1 + \delta, \quad \frac{\partial \theta_3}{\partial y} = 0; \\
 &\text{pour } x = 0 \text{ et } x = A, \forall y, \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

On cherche à étudier le comportement temporel des perturbations infinitésimales solution du système d'équations aux perturbations linéarisées (3.9). On développe les perturbations en fonction du temps sous la forme : $e^{\sigma t}$. Nous écrivons σ sous la forme : $\sigma = \sigma_r + I\sigma_i$, où σ_r est le facteur d'amplification temporelle de la perturbation et $\sigma_i = \omega$, la pulsation, avec $I^2 = -1$. L'analyse du signe de σ_r permet de déterminer la stabilité de l'écoulement de base vis-à-vis des perturbations infinitésimales.

- Si $\sigma \in \mathbb{R}$: les perturbations sont des fonctions décroissantes du temps si $\sigma < 0$ et croissantes si $\sigma > 0$.
- Si $\sigma \in C$ avec $\sigma_i \neq 0$: on a un mode oscillant caractérisé par une pulsation $\sigma_i = \omega$. Ce mode oscillant sera amorti ou amplifié selon le signe de σ_r : on parle de stabilité marginale si $\sigma_r = 0$. Le système est linéairement stable si, pour tous les modes, $\sigma_r < 0$. Enfin, s'il existe un seul mode pour lequel $\sigma_r > 0$, l'écoulement de base sera dit instable.

3.3.1.2 Décomposition en modes normaux

Pour étudier la stabilité de la solution d'équilibre, les perturbations sont développées en modes normaux.

En fait plusieurs points sont à noter pour permettre l'écriture du développement en modes normaux. La cellule étant d'extension infinie selon la direction \vec{e}_x , on montre que les perturbations selon x peuvent être développées sous la forme de fonction périodiques selon x . On doit donc chercher les perturbations du système (3.11) sous la forme :

$$(\varphi, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \eta) = \left[\tilde{\varphi}(y), \tilde{\theta}_1(y), \tilde{\theta}_2(y), \tilde{\theta}_3(y), \tilde{\eta}(y) \right] e^{Ik_x x + \sigma t} + c.c \tag{3.13}$$

où k_x est le nombre d'onde des perturbations selon la direction infinie \vec{e}_x et $c.c$ désigne le

complexe conjugué.

3.3.1.3 Transition stationnaire

Nous introduisons les perturbations (3.13) dans le système d'équations (3.11) et nous nous intéressons dans une première partie à la bifurcation stationnaire. On pose pour cela $\sigma = 0$ et nous obtenons le système suivant d'équations linéarisées en $[\tilde{\varphi}(y), \tilde{\theta}_1(y), \tilde{\theta}_2(y), \tilde{\theta}_3(y), \tilde{\eta}(y)]$.

$$\left\{ \begin{array}{l} (D^2 - k^2)\tilde{\varphi} + RaIk \left[(1 + \psi)\tilde{\theta}_2 + \psi\tilde{\eta} \right] = 0 \\ (D^2 - k^2)\tilde{\theta}_2 - Ik\tilde{\varphi} = 0 \\ (D^2 - k^2)\tilde{\eta} - IkLe\tilde{\varphi} = 0 \\ (D^2 - k^2)\tilde{\theta}_1 = 0 \\ (D^2 - k^2)\tilde{\theta}_3 = 0 \end{array} \right. \quad (3.14)$$

où l'opérateur D représente $\frac{d}{dy}$ et $k = k_x$.

En combinant la première et seconde équation du système (3.14), on obtient :

$$(D^2 - k^2)^2\tilde{\theta}_2 - Ra k^2 \left[(1 + \psi)\tilde{\theta}_2 + \psi\tilde{\eta} \right] = 0 . \quad (3.15)$$

En combinant la deuxième et troisième équation du système (3.14), on obtient :

$$(D^2 - k^2)(\tilde{\eta} - Le\tilde{\theta}_2) = 0 \quad (3.16)$$

Cette dernière équation du second ordre admet comme solution :

$\tilde{\eta} - Le\tilde{\theta}_2 = \alpha_1 \sinh(ky) + \alpha_2 \cosh(ky)$, où α_1 et α_2 sont deux constantes arbitraires.

À partir des équations (3.15) et (3.16), on en déduit :

$$(D^2 - k^2)^2\tilde{\theta}_2 - Ra k^2 [1 + \psi + \psi Le] \tilde{\theta}_2 = Ra k^2 \psi [\alpha_1 \sinh(ky) + \alpha_2 \cosh(ky)] \quad (3.17)$$

On est donc ramené au système différentiel comportant seulement 3 fonctions inconnues $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2$

et $\tilde{\theta}_3$:

$$\begin{cases} (D^2 - k^2)^2 \tilde{\theta}_2 - Ra k^2 [1 + \psi + \psi Le] \tilde{\theta}_2 = Ra k^2 \psi [\alpha_1 \sinh(ky) + \alpha_2 \cosh(ky)] \\ (D^2 - k^2) \tilde{\theta}_1 = 0 \\ (D^2 - k^2) \tilde{\theta}_3 = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

α_1 et α_2 sont des constantes d'intégration vérifiant les relations suivantes déduites des conditions aux limites sur $\tilde{\eta}$ en $y = 0$ et $y = 1$ à savoir $\left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \right)_{y=0,1} = 0$:

$$\begin{aligned} Le \frac{\partial \tilde{\theta}_2}{\partial y} + k \alpha_1 &= 0 \quad \text{pour } y = 0; \\ Le \frac{\partial \tilde{\theta}_2}{\partial y} + k \alpha_1 \cosh(k) + k \alpha_2 \sinh(k) &= 0 \quad \text{pour } y = 1. \end{aligned} \quad (3.19)$$

avec les conditions aux limites associées :

$$\begin{aligned} \text{pour } y = -\delta, \quad \frac{\partial \tilde{\theta}_1}{\partial y} &= 0; \\ \text{pour } y = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\theta}_1}{\partial y} &= \frac{1}{d} \frac{\partial \tilde{\theta}_2}{\partial y}, \quad \tilde{\theta}_1 = \tilde{\theta}_2, \quad (D^2 - k^2) \tilde{\theta}_2 = 0; \\ \text{pour } y = 1, \quad \frac{\partial \tilde{\theta}_3}{\partial y} &= \frac{1}{d} \frac{\partial \tilde{\theta}_2}{\partial y}, \quad \tilde{\theta}_2 = \tilde{\theta}_3, \quad (D^2 - k^2) \tilde{\theta}_2 = 0; \\ \text{pour } y = 1 + \delta, \quad \frac{\partial \tilde{\theta}_3}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

La solution générale de l'équation différentielle du quatrième ordre de la première équation du système (3.18) s'écrit comme une combinaison de 4 fonctions particulières indépendantes dont l'expression dépend du signe de $Ra(1 + \psi + \psi Le)$. Ces conditions nous permettent de distinguer 4 régions du plan (Ra, ψ) . La solution de cette dernière équation est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée, $\tilde{\theta}_{2sh}$ et de la solution particulière, $\tilde{\theta}_{2sp}$:

$$\tilde{\theta}_{2sp} = - \frac{\psi (\alpha_1 \sinh(ky) + \alpha_2 \cosh(ky))}{1 + \psi + \psi Le}, \quad (3.21)$$

La solution de la première équation du système (3.18) sans second membre est cherchée sous la forme e^{ry} , ce qui conduit à l'équation caractéristique suivante :

$$(r^2 - k^2)^2 - Rak^2(1 + \psi + \psi Le) = 0 \quad (3.22)$$

Il s'agit d'une équation algébrique du quatrième degré. La nature réelle ou complexe des quatre racines de cette équation dépend du signe de $Ra(1 + \psi + \psi Le)$.

a-1 : Cas $Ra(1 + \psi + \psi Le) > 0$

Cette hypothèse correspond aux domaines grisés de la figure 3.2. Dans ce cas, les solutions de l'équation algébrique sont :

$$\begin{cases} r_1^2 = k^2 + k(Ra(1 + \psi + \psi Le))^{\frac{1}{2}} \\ r_2^2 = k^2 - k(Ra(1 + \psi + \psi Le))^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (3.23)$$

Ce qui donne deux racines pour la première équation (3.23) :

$$r_{1i} = \pm \left(k^2 + k(Ra(1 + \psi + \psi Le))^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \pm a.$$

En fonction du signe de $\left[k^2 - k(Ra(1 + \psi + \psi Le))^{\frac{1}{2}} \right]$, on obtient deux autres racines qui seront réelles ou imaginaires pures. Dans le cas de racines imaginaires pures on a :

$$r_{2i} = \pm I \left(-k^2 + k(Ra(1 + \psi + \psi Le))^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \pm Ib.$$

On montre que seules les racines imaginaires conduisent à une solution du problème. À ce dernier cas est associée la solution générale de l'équation sans second membre suivante :

$$\tilde{\theta}_{2ssm}(y) = \alpha_3 \cosh(R_1 y) + \alpha_4 \sinh(R_1 y) + \alpha_5 \cos(R_2 y) + \alpha_6 \sin(R_2 y) \quad (3.24)$$

La solution générale du système (3.18) est donnée par :

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_2(y) = & \alpha_3 \cosh(R_1 y) + \alpha_4 \sinh(R_1 y) + \alpha_5 \cos(R_2 y) + \alpha_6 \sin(R_2 y) \\ & - \frac{\psi [\alpha_1 \sinh(k y) + \alpha_2 \cosh(k y)]}{(1 + \psi + \psi Le)}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\tilde{\theta}_1(y) = \alpha_7 \cosh(k y) + \alpha_8 \sinh(k y);$$

$$\tilde{\theta}_3(y) = \alpha_9 \cosh(k y) + \alpha_{10} \sinh(k y).$$

Où :

$$R_1 = \sqrt{(\sqrt{Ra(1 + \psi + \psi Le)} + k)k}, \quad R_2 = \sqrt{(\sqrt{Ra(1 + \psi + \psi Le)} - k)k}$$

La solution obtenue dépend de dix constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9$ et α_{10} . Quand on utilise les conditions aux limites données par (3.19) et (3.20), nous obtenons un système algébrique homogène linéaire de dix équations à dix inconnues correspondant aux dix constantes. Ce système admet une solution non triviale si le déterminant de la matrice associée, $\det(Ra(k), k, Le, \psi, \delta, d)$ est égal à zéro. L'expression de ce déterminant a été obtenue en utilisant le logiciel Maple. Quand on calcule le déterminant, on obtient l'équation de dispersion reliant le nombre de Rayleigh Ra , le nombre d'onde k , le rapport des épaisseurs δ , le rapport des conductivités thermiques d , le nombre de Lewis Le et le facteur de séparation ψ . En raison de la longueur de l'expression de ce déterminant, il n'est pas donné ici afin de ne pas alourdir le texte. On a aussi validé les valeurs du nombre de Rayleigh critique et du nombre d'onde critique correspondant à la transition stationnaire en utilisant le code d'éléments finis (Comsol).

3.3.1.4 Cas des perturbations de très grandes longueurs d'onde

Lorsque le nombre d'onde critique k tend vers zéro, il est possible de simplifier les calculs effectués à partir du logiciel symbolique Maple en faisant un développement limité du déterminant $\det(Ra(k), k, Le, \psi, d, \delta)$ au voisinage de $k = 0$.

$$\det(Ra(k), k, Le, \psi, d, \delta) = \frac{Ra}{1 + \psi + Le\psi} F(Ra, Le, \psi, d, \delta, k) k^6 \quad (3.26)$$

Le cas singulier $1 + \psi + Le\psi$ sera étudié séparément. A partir de cette relation de dispersion, on détermine le nombre d'onde critique et le nombre de Rayleigh critique. On fixe pour cela la valeur du rapport d et δ et celle du nombre de Lewis. Pour chaque valeur de ψ fixée, on cherche

la valeur de $k = k_c$ qui minimise le nombre de Rayleigh pour obtenir le nombre de Rayleigh critique associé Ra_c .

Pour $\psi \leq 0$, on trouve que le nombre d'onde critique reste égale à 0 pour des nombres de Rayleigh critiques négatifs. Nous allons préciser le domaine de variation de ψ pour lequel la perte de stabilité de la solution d'équilibre conduit à un écoulement stationnaire monocellulaire dans une cellule de grande extension longitudinale. Pour cela, nous développons la fonction F au voisinage de $k = 0$ ce qui nous donne :

$$F(Ra, Le, \psi, d, \delta, k^2) = F_1(Ra, Le, \psi, d, \delta) + F_2(Ra, Le, \psi, d, \delta)k^2 + 0(k^4) \quad (3.27)$$

La fonction $F_1(Ra, Le, \psi, d, \delta)$ s'annule pour :

$$Ra_0 = \frac{12(1 + 2d\delta)}{1 + \psi(2Le d\delta + Le + 1)} \quad (3.28)$$

Cette valeur de Ra_0 correspond à l'apparition de l'écoulement monocellulaire associé à $k = 0$. Ra_0 ne correspond pas nécessairement à un nombre de Rayleigh critique du problème considéré, comme le montre la figure 3.3. En remplaçant Ra par Ra_0 dans l'expression de F_2 , l'équation : $F_2(Ra, Le, \psi, d, \delta) = 0$ conduit après simplification à une relation liant les différents paramètres physiques du problème (Le, ψ, d, δ) qui s'écrit sous la forme :

$$10(1 + 2d\delta)^2 Le\psi + [10 - d\delta(70\delta^2 + 51d\delta - 12)(1 + \psi)] \quad (3.29)$$

La solution de cette équation par rapport à ψ nous donne :

$$\psi_{mono} = \frac{1}{\frac{10 Le(1 + 2d\delta)^2}{51 d^2 \delta^2 + 70 d \delta^3 - 10 - 12 d \delta} - 1} \quad (3.30)$$

Lorsque nous prenons $d \rightarrow \infty$ dans l'équation (3.30), ce qui correspond à des parois infiniment conductrices dans l'équation, nous retrouvons le même résultat obtenus par Sovran et al. [123] dans le cas de cellule poreuse maintenu entre deux températures uniformes à savoir

$\psi_{mono} = \frac{1}{\frac{40 Le}{51} - 1}$. Notons que $d \rightarrow \infty$, signifie que les parois délimitant la couche poreuse

sont infiniment conductrices comparées à la couche poreuse saturée par le fluide binaire, dans ces conditions ces parois soumises à un flux sur les faces externes se comportent comme des surfaces isothermes et on se retrouve dans la situation de couche poreuse saturée maintenue à des températures constantes.

Cherchons à quelle condition le nombre d'onde $k = 0$ associé au nombre de Rayleigh $Ra_0 = 12(1 + 2d\delta)/[1 + \psi(2Le d\delta + Le + 1)]$ correspond respectivement à un nombre d'onde critique

et un nombre de Rayleigh critique.

Pour cela, on distinguera 2 cas, $Ra > 0$ et $Ra < 0$:

- $Ra > 0$, Pour que Ra_0 corresponde à un minimum pour $k = 0$, il faudrait que l'on montre que $\frac{dRa}{dk} \geq 0$ ou plus simplement $\frac{dRa}{dk^2} \geq 0$ puisque le développement au voisinage de $k = 0$ de l'équation de dispersion dépend uniquement de k^2 .

En effet si $\frac{dRa}{dk^2} \geq 0 \Rightarrow Ra$ est minimum au voisinage de $k = 0$.

- $Ra < 0$, Pour que Ra_0 soit minimum pour $k = 0$, il faudrait que $\frac{dRa}{dk^2} \leq 0$ au voisinage de $k = 0$. Ce qui signifie que $|Ra|$ est minimum quand $k \rightarrow 0$.

En différenciant directement par rapport à k^2 l'expression du déterminant, on trouve après factorisation :

$$dF_1 + k^2 dF_2 + F_2 dk^2 + d(0(k^4)) = 0 \quad (3.31)$$

Lorsqu'on a $k \rightarrow 0$, cette équation conduit à :

$$\left(\frac{dF_1}{dk^2} \right)_{k=0} = -F_2(Ra_0, Le, \psi, d, \delta) \quad (3.32)$$

$$\frac{dF_1}{dk^2} = \left(\frac{dF_1}{dRa} \right)_{Ra=Ra_0} \cdot \left(\frac{dRa}{dk^2} \right) \Rightarrow \frac{dRa}{dk^2} = \left(\frac{dF_1}{dk^2} \right)_{k=0} / \left(\frac{dF_1}{dRa} \right)$$

En considérant la relation provenant de l'expression de $F_1 = F_1(Ra, Le, \psi, d, \delta)$:

$$\left(\frac{dF_1}{dRa} \right)_{k=0} = \frac{\sqrt{12}}{3} (1 + \psi + \psi Le)^2 [\psi(1 + Le(1 + 2d\delta)) + 1] \sqrt{\frac{(1 + 2d\psi)(1 + \psi + \psi Le)}{\psi(1 + Le(1 + 2d\psi)) + 1}} \quad (3.33)$$

On en déduit que :

$$\left(\frac{dRa}{dk^2} \right)_{k=0} = \frac{4[10(1 + 2d\delta)^2 Le\psi + (1 + \psi)(12d\delta + 10 - 70d\delta^3 - 51d^2\delta^2)]}{35 [\psi(1 + Le(1 + 2d\delta)) + 1]^2} \quad (3.34)$$

$\left(\frac{dRa}{dk^2} \right)_{k=0}$ a le même que le signe que le numérateur (N_{num}) de l'équation (3.34).

On aura $\frac{dRa}{dk^2} > 0$ si $N_{num} = 10(1 + 2d\delta)^2 Le\psi + (1 + \psi)(12d\delta + 10 - 70d\delta^3 - 51d^2\delta^2) > 0$
 N_{num} étant un polynôme de degré 1 par rapport à ψ s'annule pour

$$\psi = \frac{51d^2\delta^2 + 70d\delta^3 - 10 - 12d\delta}{10Le(1 + 2d\delta)^2 - 51d^2\delta^2 - 70d\delta^3 + 10 + 12d\delta} = \psi_{mono} \text{ trouvé précédemment.}$$
 Le nombre de Lewis est grand devant 1 pour des solutions binaires de même que d , rapport des conductivités thermiques des parois bonnes conductrices de la chaleur et du milieu poreux saturée par convection de la chaleur. δ , rapport des épaisseurs est généralement de l'ordre de 1. Dans ce cas, le signe du dénominateur de la relation donnant ψ_{mono} est celui du groupement : $40Le - 51$ donc positif. On en déduit que pour $\psi \geq \psi_{mono}$, $\frac{dRa}{dk^2} \geq 0$ et le nombre de Rayleigh obtenu pour $k = 0$ est bien le nombre de Rayleigh critique $Ra_0 = Ra_c$.

Pour $Ra < 0$, on montre de façon analogue que pour $\psi < \psi_{mono}$, $\frac{dRa}{dk^2} \leq 0$ et $Ra_0 = Ra_c$.

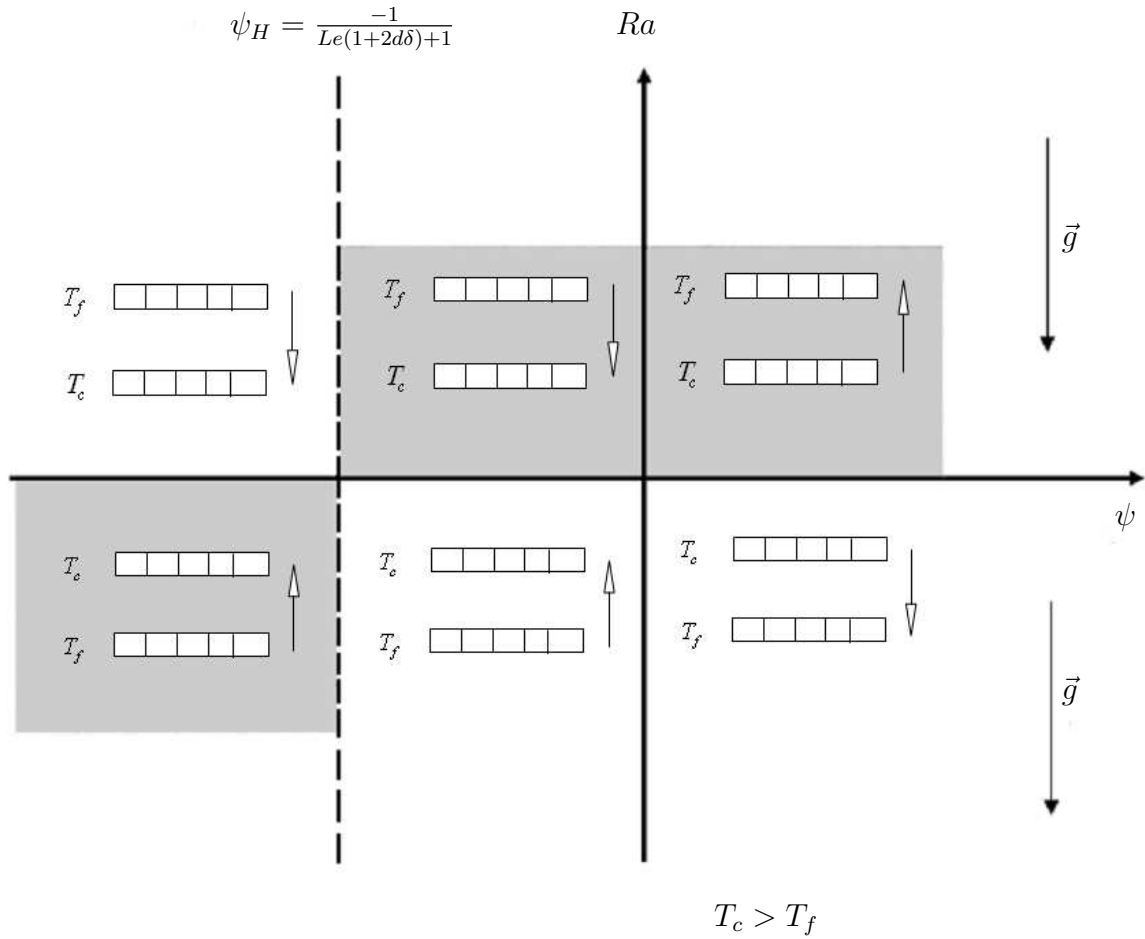


FIGURE 3.2 – Régionnement du plan (Ra, ψ) correspondant aux différentes migrations du constituant le plus lourd au sein de la cavité.

a-2 : Cas $Ra(1 + \psi + \psi Le) < 0$

Dans le cas des deux domaines non grisés de la figure (3.2), on procède de la même manière que précédemment. On notera $Ra(1+\psi+\psi Le) = -Ra_m^2$ avec $Ra_m \in \mathfrak{R}$. L'équation caractéristique associée à cette équation au 4^e ordre sans second membre conduit à :

$$(\lambda^2 - k^2)^2 = Ra(1 + \psi + \psi Le)k^2 = -Ra_m^2 k^2 \Rightarrow \lambda^2 = [k^2 \pm I Ra_m k]$$

d'où $\lambda = \pm (k^2 \pm I Ra_m k)^{\frac{1}{2}}$. On en déduit en utilisant le logiciel de calcul Maple que :

$$\begin{cases} Re(\lambda) = \pm \sqrt{\frac{k^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{Ra_m^2 k^2 + k^4}} = \alpha \\ Im(\lambda) = \pm \sqrt{\frac{-k^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{Ra_m^2 k^2 + k^4}} = \beta \end{cases} \quad (3.35)$$

La solution générale de l'équation différentielle du 4^{ieme} ordre sans second membre est de la forme :

$$\theta_2(y) = e^{\alpha y} [A \sin(\beta y) + B \cos(\beta y)] + e^{-\alpha y} [C \sin(\beta y) + D \cos(\beta y)] \quad (3.36)$$

Dans ce cas, le déterminant s'écrit sous la forme :

$$\det(Ra(k), k, Le, \psi, d, \delta) = \frac{k^4}{8} \frac{\sqrt{2k^2 + 2\sqrt{-k^2(Ra + Ra\psi + RaLe\psi + k^2)}}}{(1 + \psi + \psi Le)^2} G(Ra, Le, \psi, d, \delta, k) \quad (3.37)$$

On pourra directement déterminer les nombres de Rayleigh et d'onde critiques Ra_c et k_c en fixant chaque fois d, δ, Le et ψ et tracer la courbe de stabilité correspondant à la transition vers la solution stationnaire.

a-3 : Cas $Ra(1 + \psi + \psi Le) = 0$

Pour compléter les courbes, on a résolu analytiquement le problème dans le cas particulier $1 + \psi + \psi Le = 0$, c'est à dire $\psi = -\frac{1}{1 + Le}$. L'équation (3.17) est résolu analytiquement en utilisant le logiciel Maple. On obtient deux équations de dispersion qui correspondent à la première et la deuxième bifurcation.

$$Ra_{c1} = g_1(k, d, \delta) \frac{(1 + Le)}{Le} \quad \text{et} \quad Ra_{c2} = g_2(k, d, \delta) \frac{(1 + Le)}{Le} \quad (3.38)$$

où :

$$g_1(k, d, \delta) = \frac{8k^2(1 - e^{2k})[(1 - d)(e^k + e^{2k\delta}) + (1 + d)(1 + e^{k(1+2\delta)})]}{d(-1 + e^{2k\delta})(2k^2 e^{2k} - 2k^2 e^k - 2k e^k - 2k e^{2k} + e^{3k} + e^{2k} - e^k - 1)}$$

$$g_2(k, d, \delta) = \frac{8k^2(1 - e^{2k})[(1 - d)(e^k - e^{2k\delta}) + (1 + d)(e^{k(1+2\delta)} - 1)]}{d(-1 + e^{2k\delta})(2k^2e^{2k} - 2k^2e^k - 2ke^k - 2ke^{2k} + e^{3k} + e^{2k} - e^k - 1)}$$

Les deux équations de dispersion conduisent pour $(Le, d, \delta) = (232, 28.4, 3)$ à :

$$Ra_{c1} = -12 \frac{(1 + Le)}{Le}, k_{c1} = 0 \quad \text{et} \quad Ra_{c2} = -64.30 \frac{(1 + Le)}{Le}, k_{c2} = 3.40 \quad \forall \quad Le \quad (3.39)$$

Nous montrons que la droite $\psi = -\frac{1}{1 + Le}$ n'est pas une asymptote de la courbe Ra_{cs} , mais la coupe en $Ra_{cs} = -12 \frac{(1 + Le)}{Le}$.

Tous les résultats analytiques et les interprétations physiques trouvés à partir des cas $a - 1$, $a - 2$ et $a - 3$ sont représentés dans le tableau 3.1 et sur les figures 3.3 et 3.4. Les résultats analytiques obtenus sont en très bon accord avec ceux obtenus à partir de la méthode spectrale Tau.

Dans la méthode spectrale Tau, les perturbations sont développées sous forme de fonctions polynomiales vérifiant toutes les conditions aux limites, à l'exception des conditions aux limites au niveau des surfaces internes des parois :

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_1 &= a_1 + a_2 \left(y + \frac{y^2}{2\delta} \right) + \sum_{n=1}^{N-2} a_{n+2} y^n (y + \delta)^2; \\ \tilde{\theta}_2 &= \sum_{n=1}^N b_n y^{n-1}; \\ \tilde{\theta}_3 &= c_1 + c_2 \left(y - \frac{y^2}{2(1 + \delta)} \right) + \sum_{n=1}^{N-2} c_{n+2} y^n (y - 1 - \delta)^2; \\ \tilde{\varphi} &= \sum_{n=1}^N f_n (1 - y) y^n; \\ \tilde{\eta} &= d_1 + d_2 \left(y^2 - \frac{2}{3} y^3 \right) + \sum_{n=1}^{N-2} d_{n+2} y^{n+1} (1 - y)^2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

La méthode spectrale Tau utilisée est une variante de la méthode de Galerkin. Les fonctions test sont identiques aux fonctions de base mais une partie des fonctions de base utilisées ne satisfait pas toutes les conditions aux limites. Les fonctions de base pour $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\eta}$ vérifient toutes les conditions aux limites, donc le résidu R_{φ} associé à la première équation du système (3.11)

est multiplié par $(1 - y)y^i$ avec i variant de 1 à $N \forall i = 1 \dots N$, $\int_0^1 R_\varphi(1 - y)y^i dy = 0$. On obtient N équations algébriques. Une procédure similaire est utilisée pour le résidu R_{η} associé à la troisième équation du système (3.11). Les conditions aux limites couplées pour $\tilde{\theta}_2$ avec $\tilde{\theta}_1$ et $\tilde{\theta}_3$ permettent de choisir les fonctions de base y^i , constituant une base complète de fonctions pour $\tilde{\theta}_2$. Le résidu R_{θ_2} associé à la deuxième équation du système (3.11) est multiplié par y^i avec i variant de 0 à $N - 1$, $\forall i = 0 \dots N - 1$, $\int_0^1 R_{\theta_2} y^i dy = 0$. Les fonctions de base utilisées pour $\tilde{\theta}_1$ et $\tilde{\theta}_3$ satisfont seulement les conditions aux limites pour $y = -\delta$ et pour $y = 1 + \delta$. Pour la quatrième et la cinquième équations du système (3.11), les résidus associés R_{θ_1} , R_{θ_3} sont multipliés par la fonction test correspondante qui est intégrée respectivement sur les segments $[-\delta, 0]$ et $[1, 1 + \delta]$ ce qui donne $N - 2$ équations algébriques. Un ensemble supplémentaire de quatre équations est utilisé pour satisfaire les conditions aux limites qui ne sont pas vérifiées par les fonctions d'essai : $\tilde{\theta}_1(0) = \tilde{\theta}_2(0)$, $\tilde{\theta}_2(1) = \tilde{\theta}_3(1)$, $\frac{\partial \tilde{\theta}_1(0)}{\partial y} = \frac{1}{d} \frac{\partial \tilde{\theta}_2(0)}{\partial y}$ et $\frac{\partial \tilde{\theta}_2(1)}{\partial y} = \frac{1}{d} \frac{\partial \tilde{\theta}_3(1)}{\partial y}$ ce qui donnent quatre équations algébriques. Cela donne $5N$ équations algébriques pour $5N$ constantes inconnues.

Les valeurs critiques Ra_{cs} et k_{cs} obtenues avec la solution "exacte" et la méthode spectrale Tau, pour la première bifurcation en fixant les valeurs de Le , d , δ et pour différentes valeurs de ψ , sont reportées dans le tableau (3.1). Sur les figures 3.3 et 3.4, nous présentons les diagrammes de stabilité $Ra_{cs} = f(\psi)$ et les valeurs associées à Ra_0 pour $k_{cs} = 0$ obtenues respectivement pour $(Le, d, \delta) = (5, 5, 1)$ dans le cas d'un mélange binaire de gaz, et $(Le, d, \delta) = (232, 28.4, 3)$ dans le cas d'un mélange binaire de liquide. Nous pouvons remarquer que sur la figure 3.3, pour $\psi < 0$ et $Ra < 0$ les deux courbes se confondent. Pour $\psi > 0$ et $Ra > 0$, les deux courbes sont confondues jusqu'à une certaine valeur du facteur de séparation puis s'éloignent. À partir du point de séparation, on trouve $Ra_{cs}(\psi) < Ra_0(\psi)$.

Sur la figure 3.4, nous avons décidé de ne représenter que la courbe $Ra_{cs} = f(\psi)$. Pour de grandes valeurs du nombre de Lewis, le nombre de Rayleigh critique décroît fortement quand le facteur de séparation, ψ croît.

Les figures 3.5a et 3.5b montrent l'évolution du nombre d'onde critique en fonction du facteur de séparation pour la bifurcation stationnaire pour $(Le, d, \delta) = (5, 5, 1)$ et $(Le, d, \delta) = (232, 28.4, 3)$. Pour $Ra_{cs} < 0$, on obtient $k_{cs} = 0$, $\forall \psi < \psi_H$ et $Ra_{cs} = 12(1 + 2d\delta)/(1 + \psi(2Le d\delta + Le + 1))$.

Lorsque $Ra_{cs} > 0$, on a $k_{cs} \rightarrow +\infty$ pour $\psi_H = \frac{-1}{1 + (1 + 2d\delta)Le}$ et diminue progressivement vers zéro pour $\psi \in [\psi_H, \psi_{mono}]$.

Pour $\psi \geq \psi_{mono}$, on obtient $k_{cs} = 0$ et $Ra_{cs} = \frac{12(1 + 2d\delta)}{1 + \psi(2Le d\delta + Le + 1)}$.

- Pour $\psi > 0$, le constituant le plus lourd se dirige vers la paroi la plus froide. La solution

TABLE 3.1 – Comparaison entre les valeurs du nombre de Rayleigh critique Ra_{cs} et le nombre d'onde critique k_{cs} obtenus à partir de la solution "exacte" et de la méthode spectrale Tau d'ordre 5.

		$Le = 5, d = 5, \delta = 1$		$Le = 232, d = 28.4, \delta = 3$	
		Ra_{cs}	k_{cs}	Ra_{cs}	k_{cs}
$\psi = -0.10$	Solution exacte	147.300	4.610	∞	—
	Méthode Tau	147.290	4.610	∞	—
$\psi = -0.05$	Solution exacte	61.753	3.495	∞	—
	Méthode Tau	61.752	3.495	∞	—
$\psi = -0.02$	Solution exacte	43.028	3.038	∞	—
	Méthode Tau	43.027	3.038	∞	—
$\psi = -0.01$	Solution exacte	38.776	2.907	∞	—
	Méthode Tau	38.775	2.908	∞	—
$\psi = 0.00$	Solution exacte	35.175	2.786	38.619	3.073
	Méthode Tau	35.074	2.786	38.619	3.073
$\psi = 0.005$	Solution exacte	33.576	2.728	10.218	0.846
	Méthode Tau	33.575	2.728	10.218	0.845
$\psi = 0.01$	Solution exacte	32.095	2.672	5.159	0.001
	Méthode Tau	32.095	2.672	5.160	0.001
$\psi = 0.02$	Solution exacte	29.439	2.564	2.583	0.00
	Méthode Tau	29.440	2.564	2.583	0.00
$\psi = 0.05$	Solution exacte	23.332	2.275	1.034	0.00
	Méthode Tau	23.333	2.276	1.034	0.00
$\psi = 0.10$	Solution exacte	16.946	1.875	0.517	0.00
	Méthode Tau	16.945	1.875	0.517	0.00
$\psi = 0.15$	Solution exacte	13.064	1.538	0.345	0.00
	Méthode Tau	13.064	1.538	0.345	0.00
$\psi = 0.20$	Solution exacte	10.504	1.233	0.258	0.00
	Méthode Tau	10.504	1.233	0.258	0.00
$\psi = 0.25$	Solution exacte	8.713	0.938	0.207	0.00
	Méthode Tau	8.713	0.938	0.207	0.00
$\psi = 0.30$	Solution exacte	7.402	0.613	0.172	0.00
	Méthode Tau	7.402	0.613	0.172	0.00
$\psi = 0.35$	Solution exacte	6.407	0.00	0.148	0.00
	Méthode Tau	6.407	0.00	0.148	0.00
$\psi = 0.40$	Solution exacte	5.641	0.00	0.130	0.00
	Méthode Tau	5.641	0.00	0.130	0.00

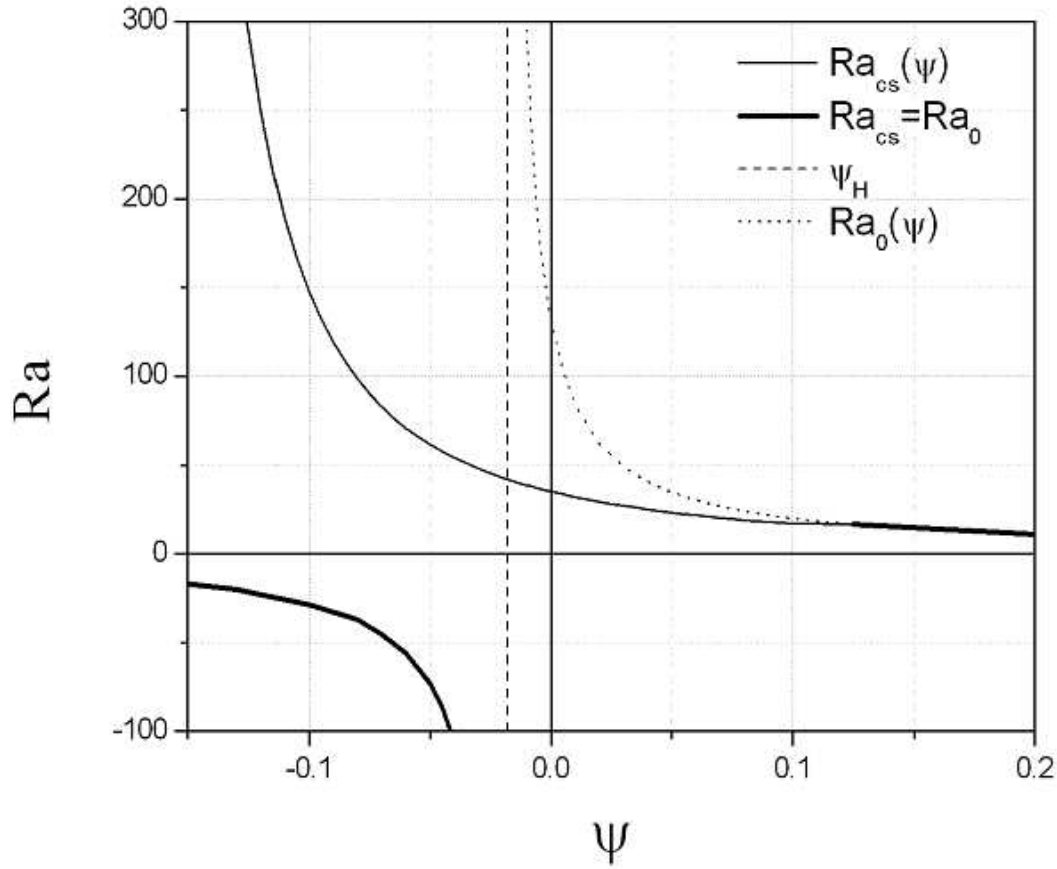


FIGURE 3.3 – Diagramme de stabilité $Ra_c = f(\psi)$ pour $Le = 5$, $d = 5$ et $\delta = 1$, trait discontinu : $\psi_H = \frac{-1}{1 + (1 + 2d\delta)Le}$ et $Ra_0 = \frac{12(1 + 2d\delta)}{1 + \psi(1 + Le + 2d\delta Le)}$.

de double-diffusion pure est alors infiniment linéairement stable lorsque la couche horizontale est chauffée par le haut ($Ra < 0$) alors qu'elle perd sa stabilité pour un nombre de Rayleigh critique inférieur au nombre de Rayleigh critique $4\pi^2$ correspondant au cas thermique pur, pour un chauffage par le bas ($Ra > 0$).

- Pour $\psi < 0$, le composant le plus lourd migre vers la paroi chaude :

Pour $Ra < 0$, la solution d'équilibre n'est plus infiniment linéairement stable contrairement au cas thermique pur et on doit s'attendre à ce que $Ra_{cs} \rightarrow -\infty$ lorsque ψ tend vers ψ_H^- par valeur négative ($\psi \rightarrow 0^-$). Cette hypothèse est confirmée par les calculs.

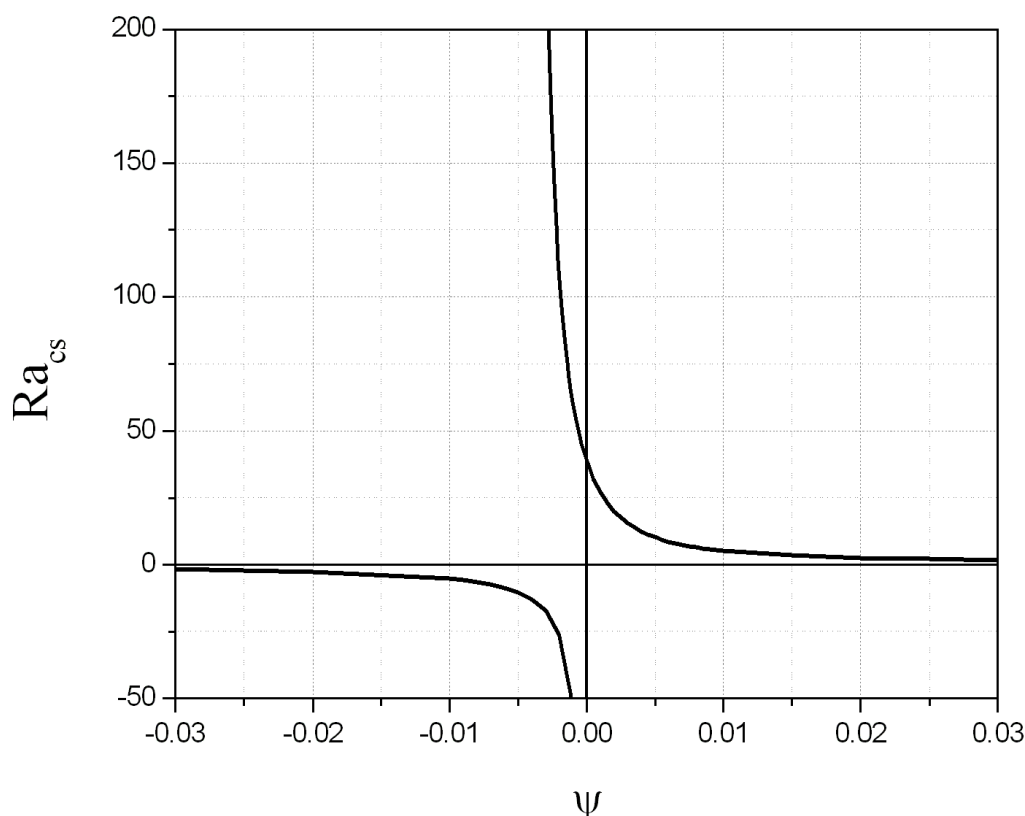


FIGURE 3.4 – Diagramme de stabilité $Ra_{cs} = f(\psi)$ pour $Le = 232$, $d = 28.4$ et $\delta = 3$.

Pour $Ra > 0$ et $(1 + \psi + \psi Le) > 0$, la migration du composant le plus lourd vers la paroi chaude (celle du bas), conduit à une augmentation du nombre de Rayleigh critique par rapport à la valeur $4\pi^2$ ($Ra_{cs} > 4\pi^2$).

Pour $Ra > 0$ et $(1 + \psi + \psi Le) < 0$, on n'obtient plus de transition vers un régime convectif stationnaire.

Sur la figure 3.6 sont dessinées les courbes de la variation du nombre de Rayleigh critique en fonction du nombre d'onde critique pour le cas, $\delta = 1$, $Le = 5$ et $\psi = 0.1$ et pour différentes valeurs du rapport de conductivité thermique d . La courbe associée au plus faible Rayleigh critique a un minimum à $k = 0$ et la valeur correspondante du nombre de Rayleigh critique est d'environ 7.5. Nous remarquons que de légères variations du rapport de conductivité thermique, d , provoque clairement de grandes différences quantitatives et qualitatives de la structure de l'écoulement au niveau de la transition : solution d'équilibre et solution instationnaire. Pour une étude expérimentale, il faudrait donc prendre le plus grand soin dans le choix des matériaux utilisés.

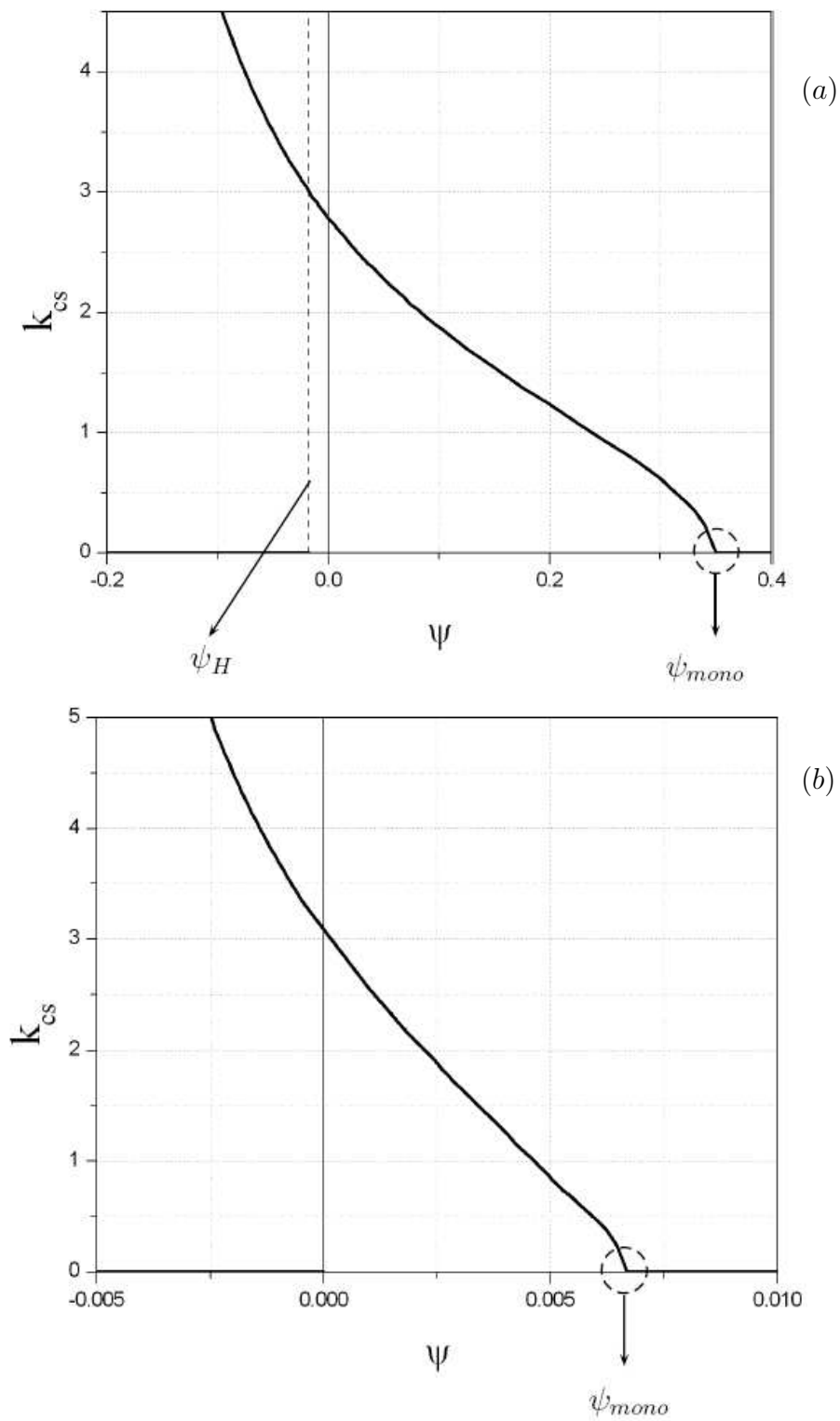


FIGURE 3.5 – Diagramme de stabilité $k_{cs} = f(\psi)$ pour (a) $Le = 5, d = 5, \delta = 1$ et (b) $Le = 232, d = 28.4$ et $\delta = 3$. Trait discontinu : $\psi_H = \frac{-1}{1 + (1 + 2d\delta)Le}$.

Nous avons dessiné sur la 3.7 les courbes de la variation du nombre de Rayleigh critique en fonction du nombre d'onde critique pour le cas, $d = 2$, $Le = 5$ et $\psi = 0.1$ et pour différentes valeurs du rapport de épaisseurs δ .

La Figure 3.8 montre la variation du nombre de Rayleigh critique en fonction du rapport des épaisseurs δ , pour Le et ψ fixés et, pour un ensemble de valeurs de d . Chaque courbe est divisée en deux régions distinctes, dont la première correspond à des petites valeurs de d , et est la région dans laquelle le nombre d'onde critique est égal à zéro. Dans cette région, la courbe est une ligne droite. La deuxième région correspond à des valeurs non nulles du nombre d'onde critique. Comme d augmente, chaque courbe tend vers une asymptote horizontale. Le critère de stabilité est indépendant de toute augmentation supplémentaire de l'épaisseur des plaques de délimitation.

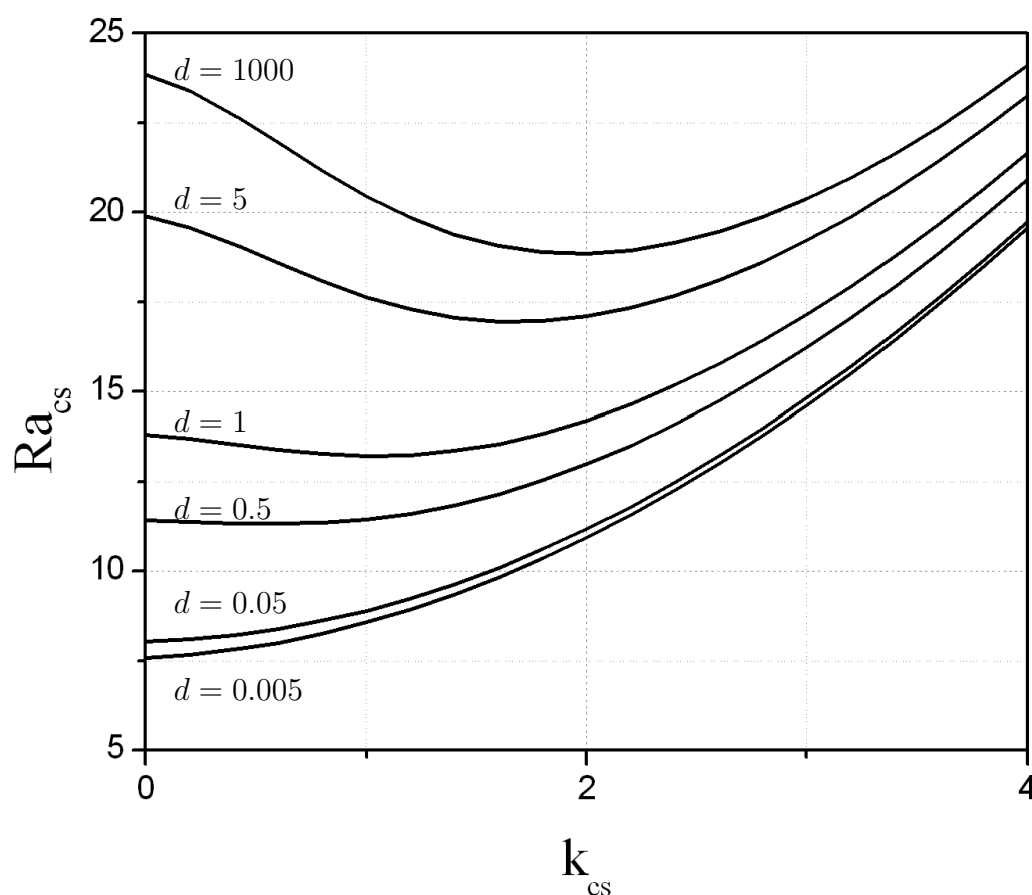


FIGURE 3.6 – Dépendance du nombre de Rayleigh critique, Ra_{cs} sur le nombre d'onde critique, k_{cs} pour $\delta = 1$, $Le = 5$, $\psi = 0.1$ et pour différentes valeurs du rapport de conductivité thermique, $d = \lambda_s/\lambda_p = 0.005, 0.05, 0.5, 1, 5$ et 1000 .

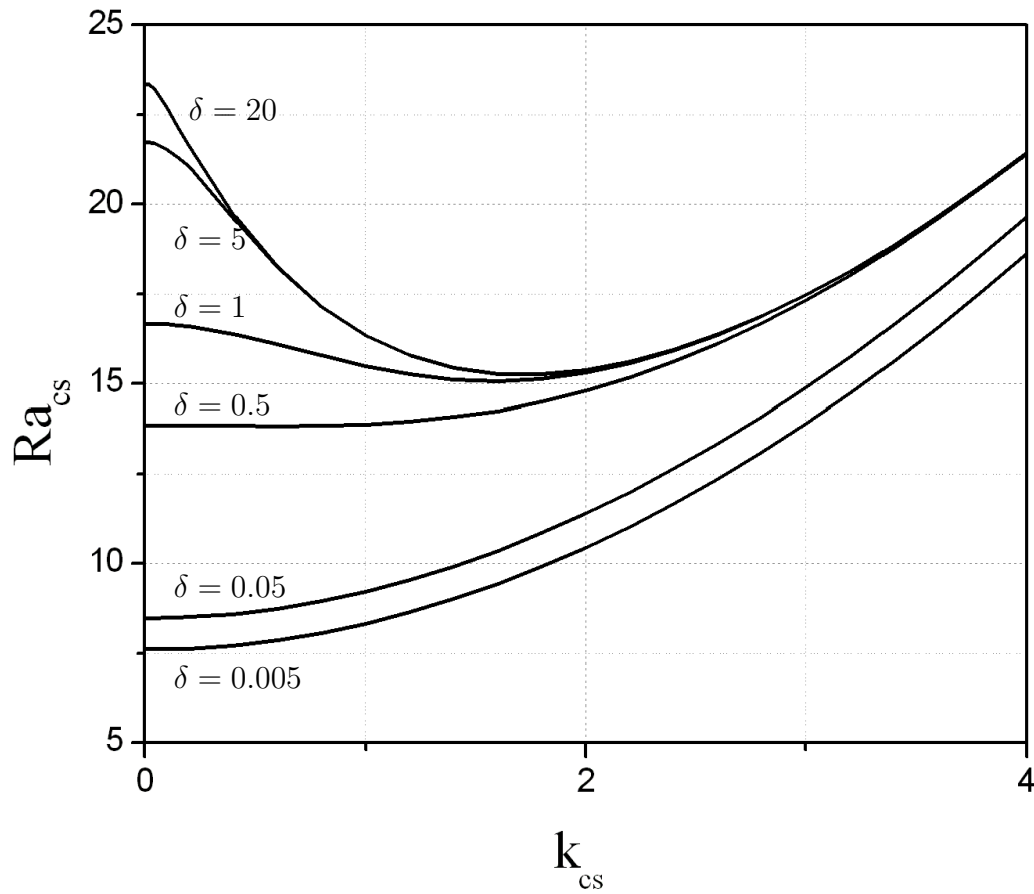


FIGURE 3.7 – Dépendance du nombre de Rayleigh critique, Ra_{cs} sur le nombre d'onde critique, k_{cs} pour $d = 2$, $Le = 5$, $\psi = 0.1$ et pour différentes valeurs du rapport de conductivité thermique, $\delta = 0.005, 0.05, 0.5, 1, 5$ et 20 .

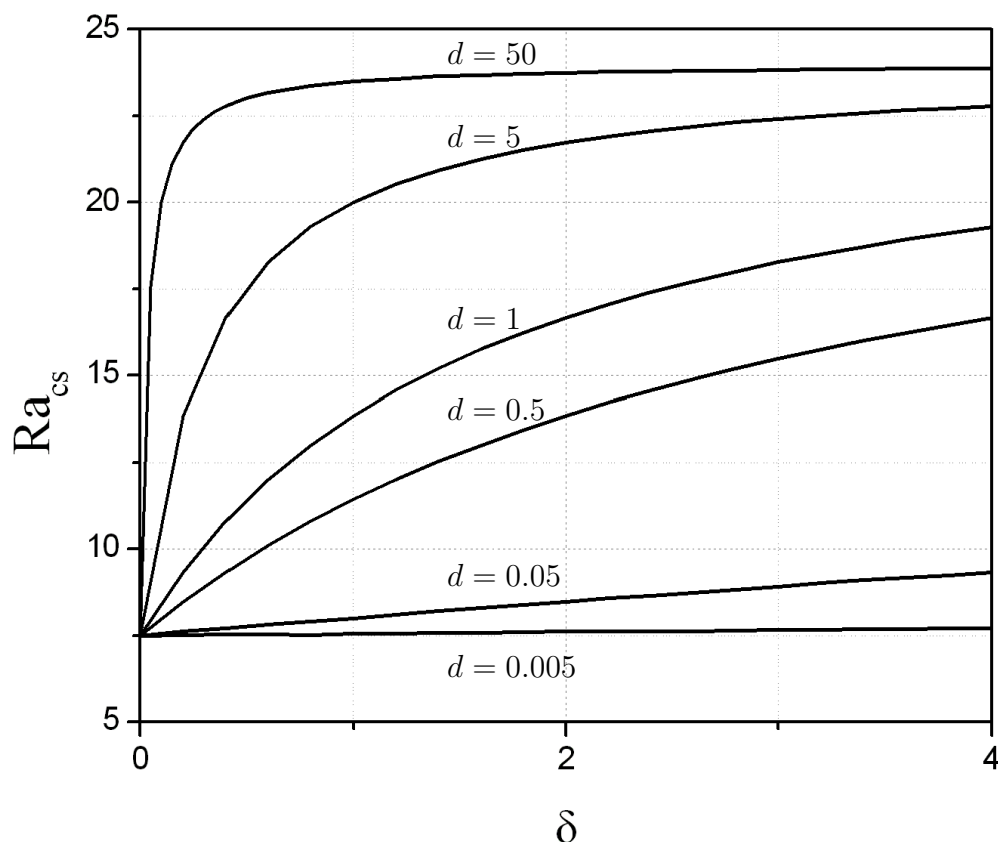


FIGURE 3.8 – Dépendance du nombre de Rayleigh critique, Ra_c sur le nombre d'onde critique, δ pour $\delta = 1$, $Le = 5$, $\psi = 0.1$ et pour différentes valeurs du rapport de conductivité thermique, $d = 0.005, 0.05, 0.5, 1, 5$ et 50 .

Nous sommes amenés à faire 3 remarques à ce niveau de notre exposé :

Remarque 1

$\delta \rightarrow 0$, signifie que l'épaisseur des parois délimitant la couche poreuse tend vers zéro. Dans ce cas, on se trouve dans la configuration physique d'un flux constant imposé directement à la couche poreuse. Ce cas correspond à l'étude développée précédemment par Bahloul et al. [7] pour $a = 1$ (coexistence de la convection double diffusive et de l'effet Soret). On retrouve effectivement le résultat obtenu par ces auteurs lorsque l'on fait tendre $\delta \rightarrow 0$ dans l'équation donnant Ra_c , à savoir $Ra_c = \frac{12}{1 + \psi + \psi Le}$.

Remarque 2

$d \rightarrow \infty$, signifie que les parois délimitant la couche poreuse sont infiniment conductrices comparées à la couche poreuse saturée par le fluide binaire. Dans ces conditions ces parois soumises à un flux sur les faces externes se comportent comme des surfaces isothermes et on se retrouve dans la situation de couche poreuse saturée maintenue à des températures constantes. C'est la situation déjà étudiée par Schöpf [117] et Charrier-Mojtabi et al. [29]. En faisant tendre $d \rightarrow \infty$, l'équation donnant Ra_0 conduit à $Ra_c = \frac{12}{\psi Le}$, résultat trouvé précédemment par ces auteurs. En ce qui concerne la convection dans un fluide binaire, Knobloch et Moore [72] ont obtenu analytiquement un résultat similaire : $Ra_c = \frac{720}{\psi Le}$.

Remarque 3

Lorsque nous tenons compte de l'effet des parois délimitant la couche poreuse et pour $\psi = 0$ (convection naturelle), nous trouvons $Ra_c = 12(1 + 2d\delta)$, résultat obtenu récemment par Mojtabi et Rees [89].

3.3.1.5 Bifurcation de Hopf

Pour l'analyse de bifurcation de Hopf, susceptible de se produire dans le cas d'une couche infinie, on développe les perturbations en modes normaux sous la forme :

$(\varphi, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \eta) = [\tilde{\varphi}(y), \tilde{\theta}_1(y), \tilde{\theta}_2(y), \tilde{\theta}_3(y), \tilde{\eta}(y)] e^{(Ikx + \omega t)}$. Lorsqu'on remplace dans les équations du système (3.9) les perturbations par leur forme développée ci dessus et en prenant $\sigma = I\omega$ (bifurcation oscillatoire), on trouve le formalisme différentiel du second ordre suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (D^2 - k^2)\tilde{\varphi} + I k Ra [(1 + \psi)\tilde{\theta}_2 + \psi\tilde{\eta}] = 0 \\ (D^2 - k^2 - I\omega)\tilde{\theta}_2 - I k \tilde{\varphi} = 0 \\ (D^2 - k^2 - I\epsilon\omega Le)\tilde{\eta} - I\epsilon\omega Le\tilde{\theta}_2 - I k \tilde{\varphi} = 0 \\ \alpha(D^2 - k^2)\tilde{\theta}_1 - I\omega\tilde{\theta}_1 = 0 \\ \alpha(D^2 - k^2)\tilde{\theta}_3 - I\omega\tilde{\theta}_3 = 0 \end{array} \right. \quad (3.41)$$

où $D = \partial/\partial y$, k est le nombre d'onde horizontal, et $I^2 = -1$. Les conditions aux limites associées sont données par (3.20). Pour résoudre ce système différentiel linéaire, on utilise la méthode Tau. Pour cela, on développe les perturbations sous la forme donnée par les équations (3.40) :

On remplace les perturbations par leurs développements dans le formalisme (3.41); ce qui conduit à un système algébrique linéaire homogène. Pour que ce système admette une solution non nulle, il faut que le déterminant associé soit nul. Dans cette étude, le déterminant est un complexe qui s'écrit : $\det(A) = R(Ra, k, \omega, \epsilon, Le, \psi, d, \delta) + I Q(Ra, k, \omega, \epsilon, Le, \psi, d, \delta) = 0$ où R et Q sont des fonctions réelles des variables $Ra, k, \omega, \epsilon, Le, \psi, d$ et δ . Il s'agit de fonctions polynomiales des variables $(Ra, k, \omega, \epsilon, Le, \psi, d, \delta)$ dont le degré par rapport aux variables Ra et k dépend de l'ordre de troncature utilisé. En général, le polynôme est de degré N par rapport à Ra pour une troncature d'ordre N ; ce qui signifie que plus l'ordre de troncature augmente, plus on aura de solutions différentes de Ra en fonction des autres paramètres. Ces différentes valeurs du nombre de Rayleigh critique correspondent à des bifurcations stationnaires secondaires (à l'exception de la plus petite valeur de Ra). Pour calculer la valeur du nombre de Rayleigh critique associé à la bifurcation de Hopf, on procède de la façon suivante, en utilisant le logiciel de calcul Maple :

- On fixe d'abord des valeurs particulières de $\psi, \epsilon, d, \delta$ et Le . On est alors conduit à résoudre le système algébrique suivant, à deux équations et à deux inconnues (Ra, ω) et un paramètre k :

$$\begin{cases} Ra(Ra, k, \omega) = 0 \\ Q(Ra, k, \omega) = 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

Lorsqu'il est possible de résoudre ce système (aux faibles ordres de troncature), on obtient les racines réelles d'indices j : $Ra_j = f_j(k)$ et $\omega_j = g_j(k)$. On peut alors chercher les minimums arithmétiques de Ra en fonction de k et obtenir les paramètres critiques $Ra_{jc} = f_j(k_c)$ et $\omega_{jc} = g_j(k_c)$. Cette procédure n'est pas toujours applicable, en particulier dans les cas d'ordres élevés de troncature.

Nous avons relevé que pour des développements d'ordres 4 et 5 des perturbations, la pulsation ω se met en facteur dans l'expression de Q . Ce résultat exprime que la transition vers un état stationnaire reste une solution possible pour le système concerné, quelle que soit la valeur donnée aux paramètres adimensionnels $(Ra, k, \epsilon, \psi, Le)$. Lorsque, l'on pose $\omega = 0$ dans l'expression du déterminant $\det(A)$, on obtient l'expression des nombre de Rayleigh critiques de la transition stationnaire. Si l'on écarte le cas $\omega = 0$, on est conduit à la recherche des nombres de Rayleigh critiques de la bifurcation de Hopf. Malgré les simplifications, il n'a pas été possible d'obtenir de relation analytique donnant les expressions des paramètres critiques (Ra_c, k_c, ω_c) en fonction de $(\epsilon, d, \delta, Le, \psi)$ et ceci même aux faibles ordres de troncature. Nous avons pu déterminer ces paramètres critiques en utilisant des procédures du logiciel Maple, permettant la représentation des fonctions implicites ou des graphes 3D.

Pour une cellule chauffée par le bas et pour $\psi < 0$, le constituant le plus lourd migre vers la paroi chaude du bas si $Ra > 0$, ce qui donne un effet stabilisant. Dans ce cas, la première bifurcation est une bifurcation de Hopf.

Nous avons déterminé les valeurs des paramètres critiques $(Ra_{co}, k_{co}, \omega_{co})$ pour la bifurcation

de Hopf par la méthode spectrale Tau à l'ordre 5 pour différentes valeurs de ϵ , d , δ , Le et ψ (Annexe A). Les figures 3.9 et 3.10 montrent (lignes pointillées) les résultats pour $Le = 5$ et $Le = 232$ pour différentes valeurs de la porosité normalisée $\epsilon = 0.3, 0.4, 0.5, 0.7$. L'influence de la porosité normalisée est précisée sur ces figures. En effet, une diminution de ϵ à d , δ , Le et ψ fixés entraîne une augmentation du nombre de Rayleigh critique, faisant également varier le point de rencontre du diagramme de stabilité associée à la bifurcation de Hopf avec le diagramme de stabilité associée à la bifurcation stationnaire.

Les figures 3.11a et 3.11b présentent les diagrammes de stabilité $\omega_{co} = f(\psi)$, pour $d = 5$, $Le = 5$, $\delta = 1$ et $\epsilon = 0.4$ et $d = 28.4$, $Le = 232$, $\delta = 3$, $\epsilon = 0.4$ respectivement. On remarque que la pulsation ω_{co} décroît lorsque le facteur de séparation ψ croît. La figure 3.12 montre la variation du nombre d'onde critique en fonction du facteur de séparation pour la bifurcation de Hopf pour $d = 5$, $Le = 5$, $\delta = 1$, $\epsilon = 0.4$. On remarque que le nombre d'onde critique ω_{co} décroît lorsque le facteur de séparation ψ croît.

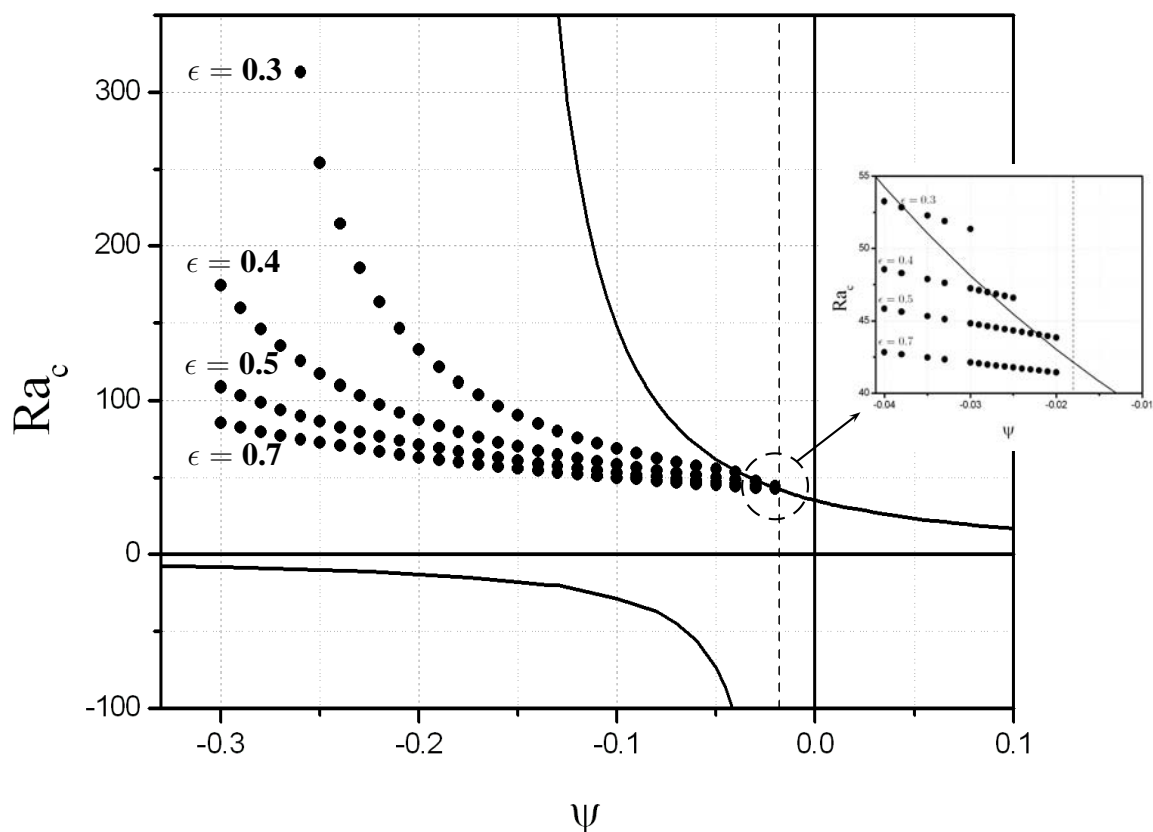


FIGURE 3.9 – Diagramme de stabilité $Ra_c = f(\psi)$ pour $Le = 5$, $d = 5$, $\delta = 1$, et pour différentes valeurs de la porosité normalisée ($\epsilon = 0.3, 0.4, 0.5, 0.7$) (méthode spectrale Tau, ordre 5). En trait plein : bifurcation stationnaire. En cercles pleins : bifurcation de Hopf. En trait discontinu : $\psi_H = \frac{-1}{1 + (1 + 2d\delta)Le}$. L'influence de la porosité normalisée est précisée dans la figure en médaillon.

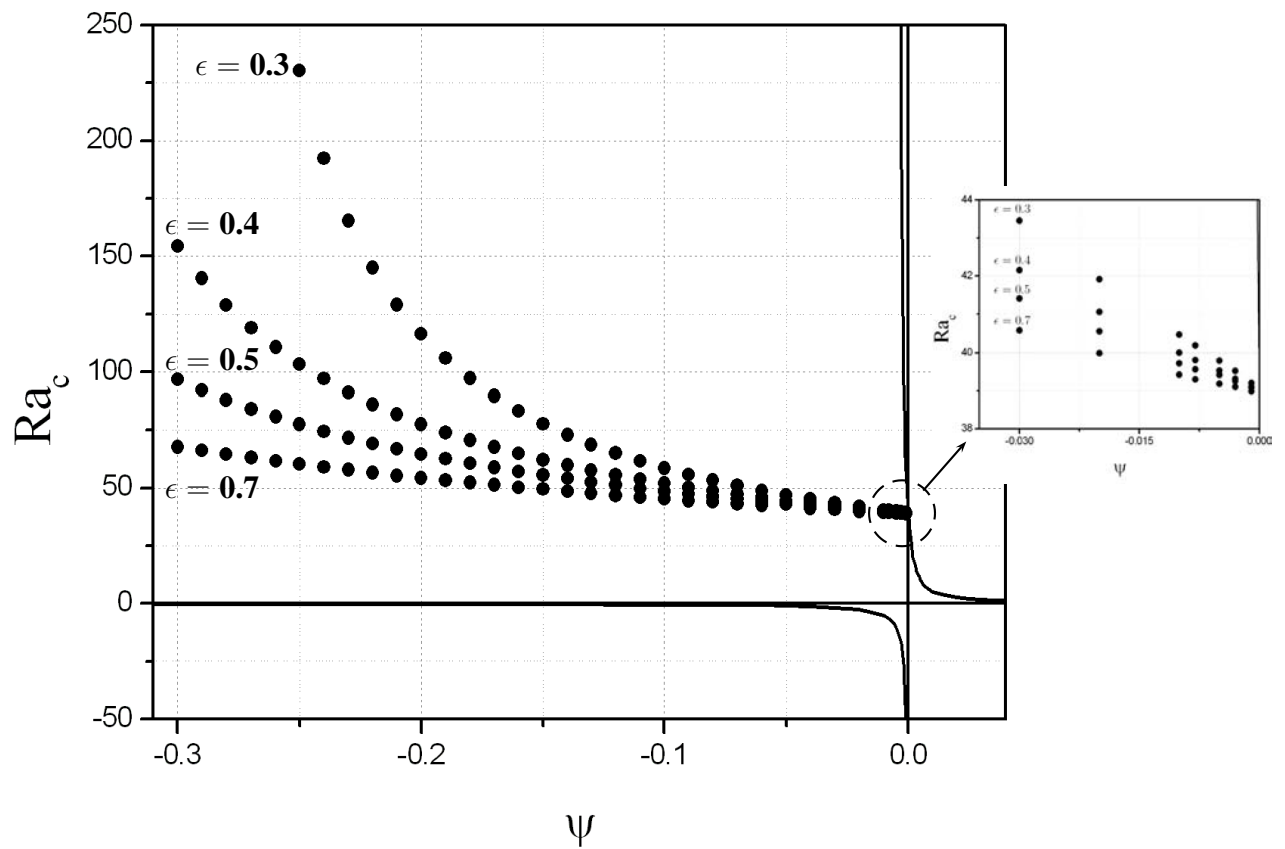


FIGURE 3.10 – Diagramme de stabilité $Ra_c = f(\psi)$ pour $Le = 232$, $d = 28.4$, $\delta = 3$, et pour différentes valeurs de la porosité normalisée ($\epsilon = 0.3, 0.4, 0.5, 0.7$) (méthode spectrale Tau, ordre 5). En trait plein : bifurcation stationnaire. En cercles pleins : bifurcation de Hopf. L'influence de la porosité normalisée est précisée dans la figure en médaillon.

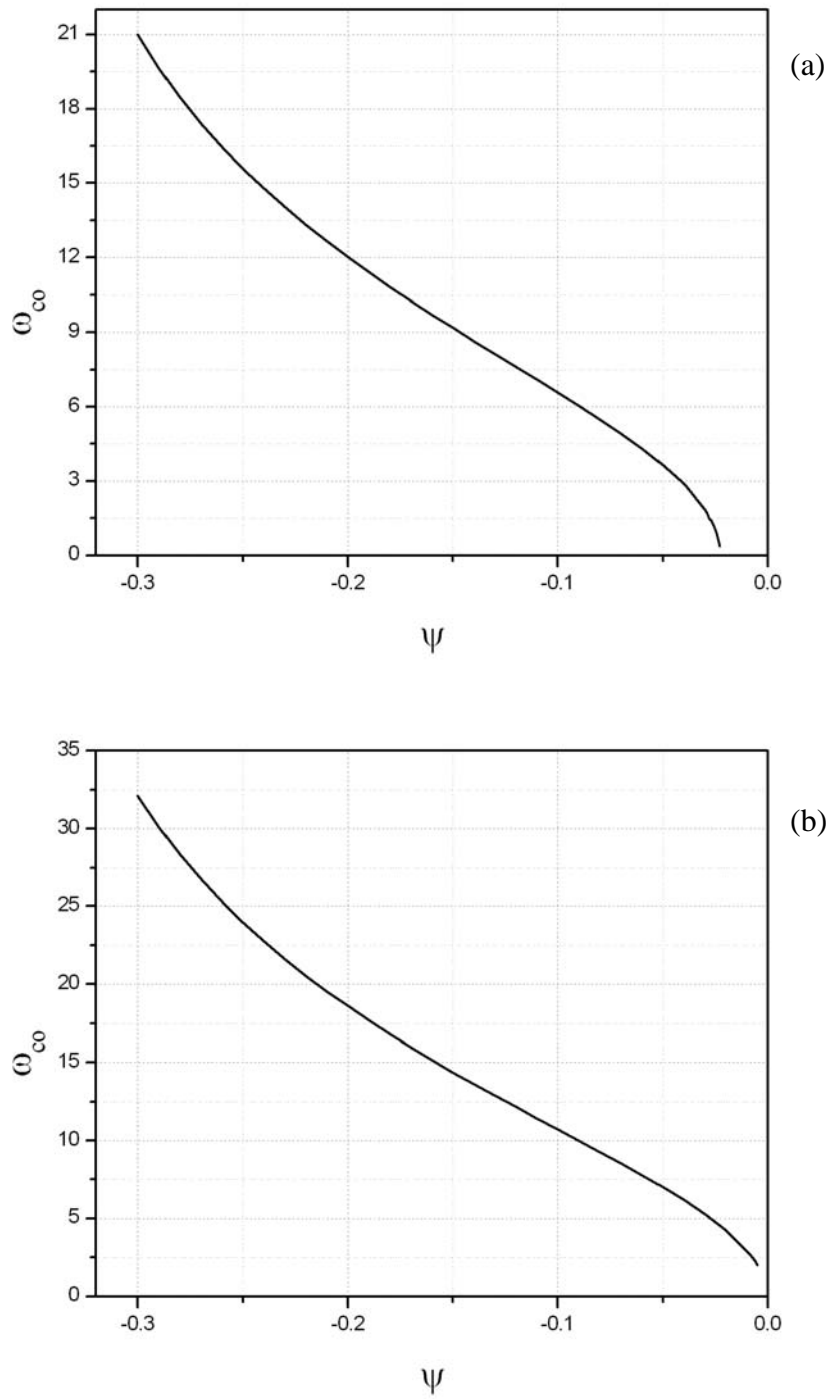


FIGURE 3.11 – Diagramme de stabilité $\omega_{co} = f(\psi)$ pour (a) $\epsilon = 0.4$, $Le = 5$, $d = 5$, $\delta = 1$, (b) $\epsilon = 0.4$, $Le = 232$, $d = 28.4$, $\delta = 3$ dans le cas de bifurcation de Hopf.

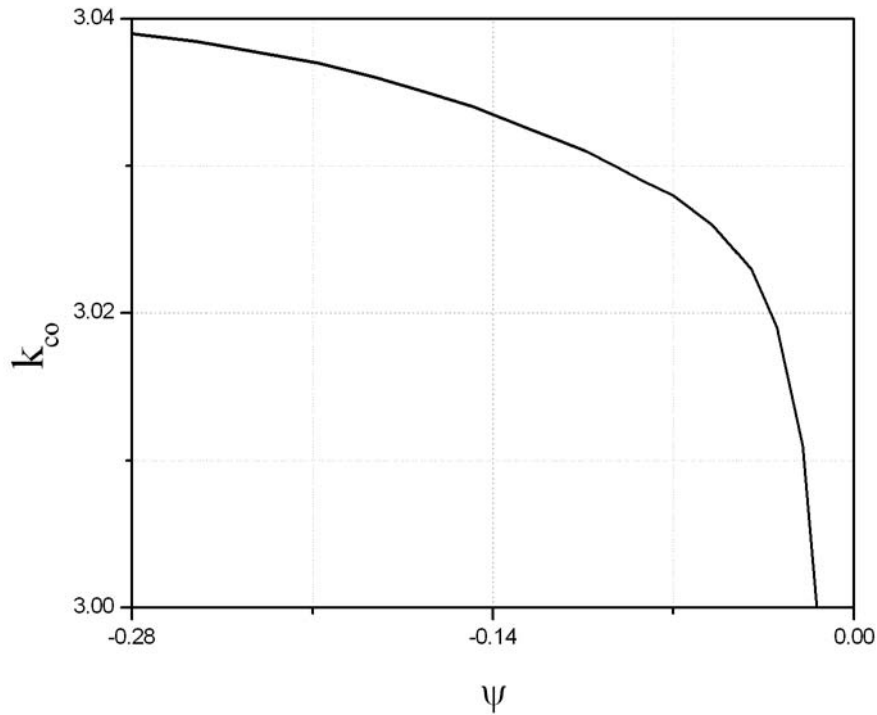


FIGURE 3.12 – Diagramme de stabilité $k_{co} = f(\psi)$, pour $\epsilon = 0.4$, $Le = 5$, $d = 5$, $\delta = 1$

3.4 Conclusion

Par une analyse de la stabilité linéaire dans le cas d'une cellule horizontale infinie, nous avons déterminé le nombre de Rayleigh critique associé au déclenchement de la convection thermosolutale avec effet Soret en tenant compte de l'effet des parois. L'influence d'un facteur de séparation, ψ , négatif ou positif et l'importance du rôle de la porosité normalisée ont été étudiées théoriquement et numériquement dans ce chapitre.

Pour les bifurcations stationnaires, une relation de dispersion analytique donnant le nombre de Rayleigh critique et le nombre d'onde critique a été obtenu. Un très bon accord a été trouvé entre les valeurs critiques obtenues analytiquement et celles obtenues numériquement par la méthode spectrale Tau.

Pour les bifurcations de Hopf, les paramètres critiques dépendent fortement de la porosité normalisée. Le rôle que joue la porosité est très important. Lorsqu'elle diminue, la stabilité de la solution d'équilibre se trouve renforcée.

Pour une cellule chauffée par le bas, la solution d'équilibre perd sa stabilité via une bifurcation

stationnaire pour $\psi \in [\psi_H, +\infty]$ et pour $\psi \leq \psi_H = \frac{-1}{1 + (1 + 2d\delta)Le}$ via une bifurcation de Hopf pour toute la gamme de valeur de la porosité considérée.

Pour $\psi \in [\psi_{mono}, +\infty]$, les paramètres critiques associés à la transition primaire sont

$$Ra_{cs} = \frac{12(1 + 2d\delta)}{1 + \psi(2Le d\delta + Le + 1)} \text{ et } k_{cs} = 0.$$

Pour une cellule chauffée par le haut, la solution d'équilibre est linéairement stable si $\psi > 0$, tandis que la première bifurcation est stationnaire si $\psi < 0$.

Chapitre 4

Prise en compte des caractéristiques thermophysiques des parois sur la séparation des constituants d'un mélange binaire en milieu poreux

RÉSUMÉ

Cette partie du manuscrit fait état d'une étude analytique et numérique de l'effet des parois, délimitant la couche poreuse sur la séparation des constituants d'un mélange binaire. Nous considérons une cavité horizontale poreuse chauffée par le bas et saturée par un mélange binaire. Cette cavité est délimitée par des plaques minces d'épaisseur uniforme, les surfaces extérieures sont soumises à un flux de chaleur constant. Nous montrons que la séparation des espèces dépend fortement du rapport de l'épaisseur des plaques et de l'épaisseur de la couche poreuse, et du rapport de leur conductivité thermique.

4.1 Introduction

Dans un mélange de fluides binaires soumis à un gradient thermique, la prise en compte de l'effet Soret induit un gradient de fraction massique. La diffusion thermogravitationnelle est la combinaison de la convection et de la thermodiffusion. Ce phénomène est utilisé pour la séparation des espèces dans les mélanges. L'intérêt considérable qui a été porté, ces dernières années, à la séparation thermogravitationnelle est dû principalement à sa présence dans plusieurs applications industrielles tels que : les procédés de séparation dans l'industrie chimique et pétrolière, le stockage des déchets nucléaires, la dispersion des contaminants chimiques dans les couches d'eau souterraine, la migration de l'humidité à travers les isolants fibreux, les pro-

cessus de séchage, les opérations de dessalement de l'eau de mer, la formation des régions dendritiques durant la solidification des alliages et l'exploration pétrolière afin de mieux rentabiliser les investissements par une meilleure connaissance de la structure des gisements (Montel [91], Costesèque et al. [43, 42]). La séparation thermogravitationnelle dans les milieux poreux a été également largement étudiée pour ses nombreuses applications fondamentales et industrielles.

Schöpf [117], en utilisant des conditions aux limites réalistes pour la première fois a comparé le déclenchement de la convection dans un fluide binaire saturant un milieu poreux au déclenchement de la convection dans un fluide au sein d'une cavité très confinée. Il a montré que l'écoulement du fluide dans une cellule étroite et ou dans un milieu poreux deviennent identiques lorsque le rapport hauteur sur épaisseur est très grand (cellule Hele-Shaw). Il a utilisé la même formulation mathématique utilisée par Brand et Steinberg [24, 25] (avec des conditions aux limites réalistes contrairement à ces derniers). Schöpf a montré que les critères de stabilité linéaire de la solution d'équilibre, en présence de l'effet Soret dans la couche poreuse et dans la couche Hele-Shaw sont les mêmes. ce resultat ne prend pas en compte le rôle de la porosité dans cette instabilité comme l'ont montré Charrier-Mojtabi et al. [29].

Mamou et Vasseur [78] ont analysé l'instabilité diffusive dans une couche poreuse rectangulaire horizontale dont les parois horizontales sont soumises à des flux de chaleur et de masse. Les résultats indiquent que selon les paramètres de contrôle, quatre régimes différents peuvent exister (diffusive stable, convectif surstable, oscillant et direct). Marcoux et al. [81], ont proposé une étude de stabilité linéaire, pour une cavité différentiellement chauffée, avec un facteur de séparation $\psi = -1$. Dans une configuration analogue mais avec des flux de matière imposés au niveau des parois verticales, Joly et al. [66] ont fait une étude analytique sur la base d'un modèle de type "écoulement parallèle" suivie d'une étude numérique plus complète lorsque le facteur de séparation est égal à -1 .

Bennacer et al. [13] ont étudié la prise en compte de l'effet Soret sur la convection dans une couche poreuse horizontale sous des gradients de température et de concentration. Ils ont montré que le gradient de concentration vertical a un effet stabilisant. Mojtabi et al. [88] ont étudié la stabilité linéaire des écoulements dans un mélange binaire avec un coefficient Soret variable. Bourich et al. [21] ont analysé numériquement les écoulements double diffusif dans une cavité poreuse carrée dont les parois horizontales sont chauffées à des températures constantes et pour des concentrations imposées sur les parois verticales. Ces auteurs ont montré que pour ψ supérieur à un ψ critique, les solutions multiples disparaissent. Par contre une solution monocellulaire se maintient quand la convection est coopérante ($\psi > 0$) ou opposée ($\psi < 0$).

Charrier-Mojtabi et al. [29] ont étudié la stabilité linéaire et non linéaire de la solution d'équilibre et de l'écoulement monocellulaire dans une couche poreuse horizontale remplie par un fluide binaire chauffé par le bas ou par le haut. L'effet Soret est pris en compte et l'influence à la fois du facteur de séparation et de la porosité normalisée est étudiée. L'analyse de stabilité linéaire menée, a montré que la solution d'équilibre perd sa stabilité via une bifurcation sta-

tionnaire ou une bifurcation de Hopf en fonction du facteur de séparation et de la porosité du milieu. La porosité joue un rôle important ; la stabilité de la solution d'équilibre est renforcée quand la porosité normalisée diminue. Dans le cas des perturbations de très grandes longueurs d'onde, pour le facteur de séparation, $\psi < 0$ et pour ψ supérieure à une valeur particulière appelée ψ_{mono} , les auteurs ont observé que l'écoulement monocellulaire conduit à une séparation des constituants de mélange entre les deux extrémités de la cellule. À partir de l'étude de la stabilité de l'écoulement monocellulaire, ils ont montré que pour une cellule chauffée par le bas et pour $\psi > \psi_{mono}$, l'écoulement monocellulaire perd sa stabilité via une bifurcation de Hopf. Elhajjar et al. [55] ont étudié l'écoulement monocellulaire prenant naissance au déclenchement de la convection dans un fluide binaire saturant une cavité horizontale poreuse chauffée par le bas. Lorsque le coefficient de séparation ψ est positif et supérieur à une certaine valeur ψ_{mono} , ces auteurs ont montré qu'il est possible de séparer les espèces de la solution binaire entre les deux extrémités de la cellule. Par ailleurs, le nombre de Rayleigh conduisant au maximum de séparation dans le cas d'une cellule horizontale est supérieur à celui de la cellule verticale (colonne de thermogravitation). Il s'en suit qu'il est possible d'obtenir une plus grande quantité de produit séparé. L'épaisseur de la cellule en configuration horizontale est plus grande que celle de la colonne verticale.

Bahloul et al. [7] ont examiné les écoulements dans une cavité horizontale soumise à des flux verticaux de chaleur et de masse avec prise en compte de l'effet Soret. Ils ont démontré que la transition prend la forme d'une bifurcation qui peut être sous critique ou fourche, suivant les valeurs du facteur de séparation et du nombre de Lewis, Le . Pour leurs études, les auteurs ont utilisé une solution analytique utilisant l'approximation de l'écoulement parallèle. Leurs travaux n'ont pas été étendus à la séparation des constituants du mélange binaire.

On se propose dans ce chapitre d'étudier la stabilité linéaire et non linéaire de la solution d'équilibre et celle de l'écoulement monocellulaire qui apparaît, sous certaines conditions, dans une couche poreuse horizontale, saturée par un fluide binaire, chauffée par le bas tout en tenant compte de l'influence des parois délimitant la cellule. L'effet Soret est pris en compte, l'influence du facteur de séparation ψ et de la porosité normalisée ϵ est étudiée. Une attention particulière est portée à l'influence des rapports de conductivité et à celle d'épaisseur des plaques délimitant la couche poreuse horizontale.

Nous avons étudié la séparation des espèces entre les deux extrémités d'une cellule horizontale, lors de l'écoulement monocellulaire pour de faibles valeurs du nombre de Rayleigh et pour des facteurs de séparation positives.

Dans la première partie, une solution analytique a été obtenue dans le cas d'une cavité à grand rapport d'aspect ($A \gg 1$). La séparation a été exprimée en fonction du nombre de Rayleigh thermique, du nombre de Lewis, du rapport de la séparation, du rapport d'aspect de la cavité poreuse, des rapports de conductivité thermique. La valeur du nombre de Rayleigh conduisant à la séparation maximale a été obtenue analytiquement.

Dans une seconde partie, un modèle analytique basé sur l'hypothèse de l'écoulement parallèle

est utilisé pour décrire l'écoulement monocellulaire obtenu au déclenchement de la convection. Ainsi, le nombre de Rayleigh critique correspondant à la perte de stabilité de l'écoulement monocellulaire est calculé. Les résultats analytiques ont été corroborés par des simulations numériques en utilisant un code de calcul par éléments finis.

Nous reprenons les équations (3.5) et les conditions aux limites (3.6) du chapitre précédent pour étudier la solution analytique de l'écoulement monocellulaire.

4.2 Solution analytique de l'écoulement monocellulaire

Dans les paragraphes précédents, nous avons établi les équations de base qui régissent les phénomènes d'écoulements et de transferts thermiques et solutaux de fluides binaires au sein de milieux poreux saturés, en tenant compte des propriétés géométriques et thermiques des parois de la cellule. Ces dernières consistent en un système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires couplées. La résolution d'un tel système, de manière analytique, est extrêmement compliquée voire impossible. Cependant, dans le cas limite de cavité poreuse horizontale de grand rapport d'aspect, $A \gg 1$, des solutions analytiques approchées sont possibles. Ainsi, dans la présente sous-section, on présente le développement d'une telle solution, basée sur l'approximation de l'écoulement parallèle. Le modèle développé permet d'accéder à la vitesse, à la température et au champ de concentration dans le cadre de l'hypothèse d'écoulement parallèle.

4.2.1 Approximation de l'écoulement parallèle.

L'approximation de l'écoulement parallèle consiste à supposer que dans une cavité de grand rapport d'aspect, $A \gg 1$. L'écoulement est de type parallèle dans la quasi totalité de la cellule à l'exception des bords de la cellule en $x = 0$ et $x = A$.

Les profils de la température et de la concentration sont alors donnés par la somme d'un terme définissant une variation longitudinale linéaire et d'un autre terme donnant la distribution transversale :

$$\begin{aligned} T_{1b} &= C_1 x + f_1(y), & T_{2b} &= C_T x + f_2(y) \\ T_{3b} &= C_3 x + f_3(y), & C_b &= C_S x + g(y) \end{aligned} \quad (4.1)$$

et

$$C_b = C_S x + g(y) \quad (4.2)$$

avec l'écoulement de base indexé "b". où C_T et C_S sont des constantes qui expriment les gradients de température et de fraction massique selon la direction x . Dans la partie centrale de la

cellule, le champ de vitesse s'écrit :

$$u(x, y) = u(y) \quad \text{et} \quad v(x, y) = 0 \quad (4.3)$$

Nous obtenons ainsi une fonction de courant ψ dépendant uniquement de l'ordonnée y .

$$\varphi = \varphi_b(y) \quad (4.4)$$

4.2.2 Formulation mathématique du problème dans le cadre de l'écoulement parallèle

En substituant les relations donnant la fonction de courant (4.4) et les profils de température et de concentration (4.1) dans le système d'équations (??), nous obtenons le système d'équation différentielles ordinaires suivant :

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} = -Ra (C_T + \psi C_S) \quad (4.5)$$

$$\frac{d^2\theta_2}{dy^2} = C_T \frac{d\varphi}{dy} \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{Le} \left(\frac{d^2g}{dy^2} - \frac{d^2\theta_2}{dy^2} \right) = C_S \frac{d\varphi}{dy} \quad (4.7)$$

$$\frac{d^2\theta_1}{dy^2} = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{d^2\theta_3}{dy^2} = 0 \quad (4.9)$$

avec les conditions aux limites associées suivantes :

$$\begin{aligned} \text{pour } y = -\delta, \quad & \frac{\partial\theta_1}{\partial y} = -\frac{\lambda_p}{\lambda_s} = -\frac{1}{d}; \\ \text{pour } y = 0, \quad & \frac{\partial\theta_1}{\partial y} = \frac{1}{d} \frac{\partial\theta_2}{\partial y} \quad \theta_1 = \theta_2, \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial\theta_2}{\partial y} = 0; \\ \text{pour } y = 1, \quad & \frac{\partial\theta_3}{\partial y} = \frac{1}{d} \frac{\partial\theta_2}{\partial y} \quad \theta_2 = \theta_3, \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial\theta_2}{\partial y} = 0; \\ \text{pour } y = 1 + \delta, \quad & \frac{\partial\theta_3}{\partial y} = -\frac{1}{d}; \\ \text{pour } x = 0 \text{ et } x = A, \forall y, \quad & \varphi = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial\theta_2}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.2.3 Détermination de la fonction de courant

Après intégration de l'équation (4.5) et en tenant compte des conditions aux limites correspondantes (4.10), la solution générale de l'équation de mouvement (4.5) conduisant au résultat suivant pour ψ :

$$\varphi_b(y) = \psi_0 (y - y^2) \quad (4.11)$$

dans lequel la constante ψ_0 s'écrit en fonction de Ra , C_T , C_S et ψ :

$$\psi_0 = \frac{1}{2} Ra (C_T + \psi C_S) \quad (4.12)$$

4.2.4 Équations générales du profil de température et de concentration

4.2.4.1 Champs de température

En intégrant les équations (4.6), (4.8) et (4.9) et en tenant compte des conditions aux limites (4.10), nous obtenons la forme générale de la distribution des températures selon y :

$$\begin{aligned} f_1(y) &= -\frac{y}{d} + \beta \\ f_2(y) &= -\psi_0 C_T \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} \right) - y + \beta \\ f_3(y) &= -\frac{y}{d} + \frac{(\psi_0 C_T)}{6} + \frac{1}{d} - 1 + \beta \end{aligned} \quad (4.13)$$

En raison de la continuité du champ de température dans la cellule, on en déduit que $C_1 = C_3 = C_T$. Nous obtenons les équations générales du profil de température en substituant dans les équations (4.1), les équations de la distribution de la température, (4.13). On trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_b = \psi_0 (1 - y) y \\ T_{1b} = C_T x - \frac{y}{d} + \beta \\ T_{2b} = C_T x - \psi_0 C_T \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} \right) - y + \beta \\ T_{3b} = C_T x - \frac{y}{d} + \frac{(\psi_0 C_T)}{6} + \frac{1}{d} - 1 + \beta \end{array} \right. \quad (4.14)$$

La valeur β due aux conditions aux limites de Neumann est arbitraire. C_S et C_T représentent respectivement les gradients de fraction massique et de température selon x .

4.2.4.2 Champs de concentration

En intégrant l'équation de base (4.7) et en tenant compte des conditions aux limites correspondantes (4.10), nous obtenons l'équation de la distribution de la concentration suivant y :

$$g(y) = \frac{\psi_0(C_T + C_S Le)(6y^2 - 4y^3 - 1)}{12} + \frac{(1 - C_S A)}{2} - y \quad (4.15)$$

En régime stationnaire, on a une stabilisation du profil de concentration, donc le flux massique est nul à travers toute section droite verticale de la cellule :

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} g(y) Le - C_S + C_T \right] dy = 0 \quad (4.16)$$

Cette condition 4.16) conduit à l'expression du gradient de fraction massique C_S selon x :

$$C_S = - \frac{Le \psi_0^2 C_T - 5 Le \psi_0 - 30 C_T}{Le^2 \psi_0^2 + 30} \quad (4.17)$$

On utilise la même approche pour trouver l'expression du gradient de température C_T selon x . On écrit pour cela que le flux thermique à travers toute section droite verticale de la cellule est nul :

$$- \int_{-\delta}^0 \frac{\partial T_{1b}}{\partial x} dy + \int_0^1 \left[- \frac{\partial T_{2b}}{\partial x} + T_{2b} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] dy - \int_1^{1+\delta} \frac{\partial T_{3b}}{\partial x} dy = 0 \quad (4.18)$$

On en déduit donc :

$$C_T = \frac{5 \psi_0}{\psi_0^2 + 30 + 60 d \delta} \quad (4.19)$$

Nous obtenons les équations générales du profil de concentration en substituant dans l'équation (4.2), l'équation de la concentration, (4.15). On trouve :

$$C_b = C_S x + \frac{\psi_0(C_T + C_S Le)(6y^2 - 4y^3 - 1)}{12} + \frac{(1 - C_S A)}{2} - y \quad (4.20)$$

En combinant l'équation (4.12) avec les termes des gradients de fraction massique et de température C_S et C_T en (4.18) et (4.20), nous obtenons l'équation ci-dessous :

$$\psi_0 = \frac{1}{2} Ra \left[\frac{5\psi_0}{8\psi_0^2 + 30 + 60d\delta} - \psi \left(\frac{Le\psi_0^2 C_T - 5Le\psi_0 - 30C_T}{Le^2\psi_0^2 + 30} \right) \right] \quad (4.21)$$

Après arrangement, nous obtenons alors une équation de cinquième degrés en ψ_0 :

$$\psi_0 \left(Le^2\psi_0^4 - \frac{5}{2}d_1\psi_0^2 - \frac{25}{16}d_2 \right) = 0 \quad (4.22)$$

où :

$$\begin{cases} d_1 = RaLe^2 - 12 [Le^2(1 + 2d\delta) + 1] , \\ d_2 = 48RaLe^2 [[1 + \psi(1 + Le(1 + 2d\delta))] - 576(1 + 2d\delta)] . \end{cases} \quad (4.23)$$

Après calcul, les solutions de l'équation (4.22) sont :

$$\psi_0 = \left[0, \pm \sqrt{5} \left(d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + Le^2 d_2} \right)^{1/2} \right] \quad (4.24)$$

Le résultat (4.24) indique que, dans le cas d'une cavité horizontale, le problème admet cinq solutions différentes. La première solution correspond à l'état de repos du fluide ($\psi_0 = 0$). Les quatre autres lorsqu'elles sont réelles correspondraient à des écoulements monocellulaires d'intensité différente. Dans l'équation (4.24), le signe (\pm) à l'extérieur des crochets, indique que le sens de rotation de l'écoulement parallèle serait dans le sens contraire des aiguilles d'une montre ou dans le sens inverse. De plus, le signe (\pm) à l'intérieur des crochets indique qu'il pourrait exister deux solutions convectives de différentes amplitudes. D'un point de vue mathématique, une solution convective existe seulement si les expressions sous le radical sont simultanément positives. Si l'ensemble des 4 racines sont deux à deux conjuguées, seule la solution $\psi_0 = 0$ associée à la solution de repos est possible.

L'équation (4.22) admet la solution triviale $\psi_0 = 0$ et l'équation de 4^{ieme} degré peut se réduire à une équation du 2nd degré en posant $\psi_0 = X$. Si l'on pose l'équation (4.22) sous la forme :

$$Le^2 X^2 + BX + C = 0, \quad (4.25)$$

avec

$$\begin{cases} B = -\frac{5}{2} d_1 , \\ C = -\frac{25}{16} d_2 . \end{cases} \quad (4.26)$$

alors on peut affirmer que lorsque le discriminant $\Delta = B^2 - 4Le^2C > 0$, le signe des produits des racines est celui du groupement C et la somme des racines est le même que $-B$.

Étudions le signe des racines de l'équation (4.25) quand elles sont réelles (case où $X_1, X_2 \in \mathbb{R}$). Pour cela posons : $S = X_1 + X_2$ et $P = X_1 \cdot X_2$. Lorsque la somme des racines S est réelle, elle est du même signe que $-B$. La somme des racines S est positive si $Ra > Ra_S = 12(1 + 2d\delta + 1/Le^2)$ et négative si $Ra < Ra_S = 12(1 + 2d\delta + 1/Le^2)$.

Le signe du produit des racines P dépend de la valeur de ψ .

Lorsque $\psi > -1/(1 + Le(1 + 2d\delta))$, nous obtenons $P > 0$ pour $Ra < Ra_P = \frac{12(1+2d\delta)}{1+\psi(1+Le+2d\delta Le)}$ et lorsque $\psi < -1/(1 + Le(1 + 2d\delta))$, nous avons $P < 0$ pour $Ra > Ra_P = \frac{12(1+2d\delta)}{1+\psi(1+Le+2d\delta Le)}$. Nous pouvons obtenir aussi le cas inverse c'est-à-dire $P < 0$ si $Ra < Ra_P$ et $P > 0$ si $Ra > Ra_P$. En étudiant le signe du discriminant de l'équation (4.22), nous avons déterminé les domaines de l'espace (ψ, Ra) où celle-ci admet quatre ou deux racines réelles et les régions où elle n'admet pas de solution réelle. Sur la figure 4.1, nous présentons pour $Le = 3$, $d = 1$ et $\delta = 0.01$ les différentes régions de l'espace (ψ, Ra) et spécifions les régions où le problème a 0, 2 ou 4 solutions réelles associées aux différentes intensités de l'écoulement parallèle.

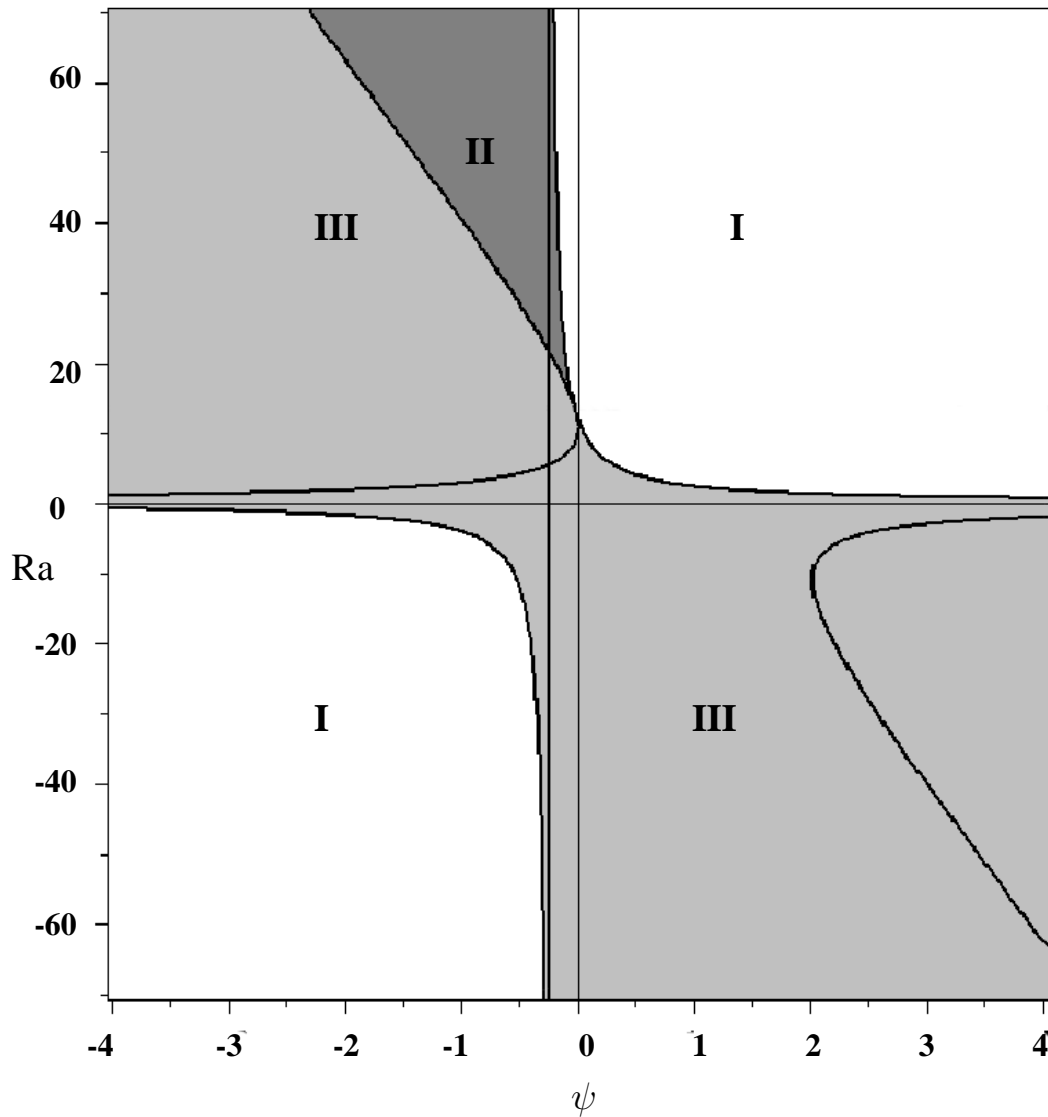


FIGURE 4.1 – Régions du plan (Ra, ψ) correspondant aux différentes structures d'écoulement à l'intérieur de la cavité rectangulaire ($A = 10$) pour $Le = 3$, $d = 1$ et $\delta = 0.1$.
I : 2 solutions réelles opposées , **II** : 4 solutions réelles opposées 2 à 2 opposées, **III** : 0 solution

4.3 Stabilité linéaire de la solution monocellulaire

Afin d'étudier la stabilité de la solution monocellulaire, on écrit les équations en introduisant les perturbations de la vitesse \vec{v} , des températures θ_1 , θ_2 et θ_3 et de la fraction massique c .

$$\varphi = \Phi - \varphi_b, \quad \theta_1 = T_1 - T_{1b}, \quad \theta_2 = T_2 - T_{2b}, \quad \theta_3 = T_3 - T_{3b}, \quad c = C - C_b,$$

En négligeant les termes du second ordre, nous obtenons les équations linéaires dont les inconnues sont les perturbations. Pour simplifier la suite des calculs, on introduit la nouvelle variable $\eta = c - \theta_2$. En développant les perturbations en modes normaux $(\varphi, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \eta) = [\varphi(y), \theta_1(y), \theta_2(y), \theta_3(y), \eta(y)] e^{Ikx + \sigma t}$, on obtient le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (D^2 - k^2)\varphi = -IkRa [\theta_2(1 + \psi) + \psi\eta] \\ \sigma\theta_2 + Ik\theta_2 \frac{\partial \varphi_b}{\partial y} + C_T \frac{\partial \varphi}{\partial y} - Ik\varphi \frac{\partial T_{2b}}{\partial y} = (D^2 - k^2)\theta_2 \\ \left(\epsilon\sigma + Ik \frac{\partial \varphi_b}{\partial y} \right) (\eta + \theta_2) + C_S \frac{\partial \varphi}{\partial y} - Ik\varphi \frac{\partial C_b}{\partial y} = \frac{1}{Le}(D^2 - k^2)\eta \\ \sigma\theta_1 = \alpha(D^2 - k^2)\theta_1 \\ \sigma\theta_3 = \alpha(D^2 - k^2)\theta_3 \end{array} \right. \quad (4.27)$$

où $D = \frac{\partial}{\partial y}$, $(k, \sigma = \sigma_r + I\sigma_i)$ désignent respectivement le nombre d'onde et le taux d'amplification temporelle de la perturbation, et $I^2 = -1$.

Les conditions aux limites associées s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{pour } y = -\delta, \quad & \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = 0 \\ \text{pour } y = 0, \quad & \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = \frac{1}{d} \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \quad \theta_1 = \theta_2, \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \\ \text{pour } y = 1, \quad & \frac{\partial \theta_3}{\partial y} = \frac{1}{d} \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \quad \theta_2 = \theta_3, \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \\ \text{pour } y = 1 + \delta, \quad & \frac{\partial \theta_3}{\partial y} = 0 \\ \text{pour } x = 0 \text{ et } x = A, \forall y, \quad & \varphi = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Pour calculer les paramètres critiques du problème, nous avons utilisé la méthode spectrale Tau. Cette méthode consiste à écrire les inconnues, c'est-à-dire les fonctions $\varphi(y)$, $\theta_1(y)$, $\theta_2(y)$, $\theta_3(y)$ et $\eta(y)$ sous forme d'un développement en série limitée de fonctions d'essais, fonctions ne dépendant que de la variable y car l'étude analytique est menée dans le cadre de l'approximation

2D. Les fonctions d'essais recherchées peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{aligned}\theta_1(y) &= \sum_{n=1}^N a_n A_n(y), & \theta_2(y) &= \sum_{n=1}^N b_n B_n(y), & \theta_3(y) &= \sum_{n=1}^N c_n C_n(y) \\ \eta(y) &= \sum_{n=1}^N d_n D_n(y), & \varphi(z) &= \sum_{n=1}^N f_n F_n(y)\end{aligned}\tag{4.29}$$

Où N est l'ordre de troncature de l'approximation et pour $n = 1..N$, $A_n(y)$, $B_n(y)$, $C_n(y)$, $D_n(y)$, $F_n(y)$ sont des fonctions linéaire indépendante qui vérifient une partie de l'ensemble des conditions aux limites du problème. Les coefficients $a_n(y)$, $b_n(y)$, $c_n(y)$, $d_n(y)$, $f_n(y)$ de ces fonctions et en particulier tous ceux associés à la température $\theta_2(y)$ sont ensuite introduite de façon à vérifier le reste des autres conditions aux limites non vérifiées par le choix des fonctions d'essais utilisées. Les fonctions $\varphi(y)$, $\theta_1(y)$, $\theta_2(y)$, $\theta_3(y)$ et $\eta(y)$ ont été développées sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\theta_1 &= a_1 + a_2 \left(y + \frac{y^2}{2\delta} \right) + a_3 \left(\frac{y^3}{\delta^2} + \frac{y^2}{\delta} - y \right) + a_4 \left(y + \frac{y^2}{2\delta} \right)^2 + \\ & a_5 \left(y + \frac{y^2}{2\delta} \right) \left(\frac{y^3}{\delta^2} + \frac{y^2}{\delta} - y \right) + a_6 \left(y + \frac{y^2}{2\delta} \right)^3 + \dots ; \\ \theta_2 &= \sum_{n=1}^N b_n y^{n-1} ; \\ \theta_3 &= c_1 + c_2 \left(y - \frac{y^2}{2(1+\delta)} \right) + c_3 \left(\frac{y^3}{(1+\delta)^2} - \frac{y^2}{(1+\delta)} - y \right) + c_4 \left(y - \frac{y^2}{2(1+\delta)} \right)^2 + \\ & c_5 \left(y - \frac{y^2}{2(1+\delta)} \right) \left(\frac{y^3}{(1+\delta)^2} - \frac{y^2}{(1+\delta)} - y \right) + c_6 \left(y - \frac{y^2}{2(1+\delta)} \right)^3 + \dots ; \\ \eta &= d_1 + d_2 \left(y^2 - \frac{2}{3} y^3 \right) + \sum_{n=1}^{N-2} d_{n+2} y^{n+1} (1-y)^2 ; & \varphi &= \sum_{n=1}^N f_n (1-y) y^n ;\end{aligned}\tag{4.30}$$

En utilisant la procédure développée au niveau du paragraphe 3.3.1.5 du chapitre 3, on a montré que l'écoulement monocellulaire perd sa stabilité via une bifurcation de Hopf. Nous avons calculé les valeurs critiques associées à cette bifurcation instationnaire pour le cas particulier $Le = 232$, $d = 28.4$, $\delta = 3$ et $\varepsilon = 0.5$. Nous avons montré également que la perte de la stabilité de l'écoulement monocellulaire conduit uniquement vers un écoulement instationnaire. En effet, en posant $\omega = 0$ on obtient deux relations de dispersion incompatible. Les fonctions d'essais

associées à θ_1 et θ_3 ont été choisies de façon à vérifier respectivement les conditions aux limites en $y = -\delta$ et en $y = 1 + \delta$. Les d'essais associées à φ et η vérifient l'ensemble des conditions aux limites du problème. Pour θ_2 les conditions aux limites en $y = 0$ et en $y = 1$ n'étant pas connues, on a pris un développement de θ_2 sous forme polynomiale. Les conditions aux limites sur θ_2 sont directement obtenues en écrivant les conditions de continuité au niveau des deux interfaces $y = 0$ et $y = 1$. Nous avons déterminé les paramètres critiques pour différentes ordres de troncatures. Nous avons fait varier l'ordre d'approximation pour θ_1 et θ_3 de 3 à 5, pour θ_2 de 3 à 6 et pour φ et η de 3 à 5. Les PC utilisées ne nous a pas permis d'aller au delà. Les ordres d'approximations utilisés ne sont pas encore suffisants pour conclure à un résultat totalement convergent. Ce travail sera complété en caractérisant la transition instationnaire par simulation numérique directe.

4.4 Simulations numériques

Le système d'équations (3.5), avec les conditions aux limites (3.6) a été résolu numériquement en utilisant une méthode aux éléments finis (le code industriel COMSOL), utilisant des maillages quadrangles adaptés à la forme rectangulaire de la cellule utilisée. L'influence de d , δ , Le et ψ pour des valeurs différentes de Ra a été étudiée pour une cellule de rapport d'aspect de la cavité poreuse $A = 10$. Nos simulations ont été réalisées avec un maillage uniforme de $200 \times 30 \times 20$.

La séparation est définie comme étant la différence des fractions massiques du constituant le plus lourd entre les deux extrémités gauche et droite de la cellule soit $S = C_S A$. Afin de réduire les effets de bords dus à la présence des deux extrémités verticales de la cellule pour le calcul de la séparation, nous avons tracé la courbe $C_S = f(x)$ à une valeur donnée de y ($y = 0.5$ par exemple) et on calcule la pente de la courbe qui est une ligne droite dans la partie centrale de la cellule.

Pour illustrer notre étude nous allons considérer : un mélange binaire (eau / éthanol), mélange déjà utilisé par Platten et al. [104]. Il s'agit d'un mélange eau/éthanol à 60.88% en masse d'eau pour lequel le facteur de séparation, $\psi = 0.2$ (voir tableau (1.2) au chapitre 1). La cellule utilisée pour notre étude est en oxyde de cuivre (CuO) et mesure 25 cm de long. Les plaques horizontales et la couche poreuse ont respectivement des épaisseurs de 3 cm et 1 cm. La cavité est remplie avec un milieu poreux composé de billes de verre (tranche granulométrie 315 μm - 400 μm). Les propriétés thermophysiques de l'eau et de différents solides pour une température de 20°C sont données dans le tableau (1.3) au chapitre 1.

TABLE 4.1 – Valeurs critiques du nombre de Rayleigh Ra_{co2} , du nombre d'onde k_{co2} et de la pulsation ω_{co2} pour la bifurcation instationnaire à partir de l'écoulement monocellulaire, pour $Le = 232$, $d = 28.4$, $\delta = 3$, $\varepsilon = 0.5$ et pour différentes valeurs du facteur de séparation ψ (Méthode spectrale Tau).

Ordre	$\theta_1 = 3, \theta_2 = 3, \theta_3 = 3, \varphi = 3, \eta = 3$				
ψ	0.10	0.20	0.30	0.50	0.80
k_{co2}	4.41	4.44	4.48	4.52	4.54
Ra_{co2}	14.671	8.080	5.578	3.144	2.189
ω_{co2}	0.925	0.958	0.977	0.996	1.007
Ordre	$\theta_1 = 3, \theta_2 = 4, \theta_3 = 3, \varphi = 3, \eta = 3$				
k_{co2}	5.30	5.18	5.10	5.02	4.95
Ra_{co2}	17.191	8.985	6.059	3.1662	2.296
ω_{co2}	1.689	1.156	1.141	1.126	1.111
Ordre	$\theta_1 = 4, \theta_2 = 4, \theta_3 = 4, \varphi = 4, \eta = 4$				
k_{co2}	5.60	5.61	5.58	5.53	5.49
Ra_{co2}	19.211	10.250	6.976	4.254	2.682
ω_{co2}	1.386	1.412	1.141	1.404	1.397
Ordre	$\theta_1 = 4, \theta_2 = 5, \theta_3 = 4, \varphi = 4, \eta = 4$				
k_{co2}	7.75	7.21	6.93	6.63	6.41
Ra_{co2}	23.966	11.910	7.869	4.665	2.887
ω_{co2}	2.081	1.924	1.839	1.747	1.681
Ordre	$\theta_1 = 4, \theta_2 = 5, \theta_3 = 4, \varphi = 5, \eta = 5$				
k_{co2}	8.11	7.41	7.04	6.63	6.31
Ra_{co2}	26.946	13.392	8.822	5.199	3.199
ω_{co2}	2.324	2.088	1.960	1.819	1.711
Ordre	$\theta_1 = 5, \theta_2 = 5, \theta_3 = 5, \varphi = 5, \eta = 5$				
k_{co2}	8.11	7.41	7.04	6.63	6.31
Ra_{co2}	26.946	13.392	8.822	5.199	3.199
ω_{co2}	2.324	2.088	1.960	1.819	1.711
Ordre	$\theta_1 = 4, \theta_2 = 6, \theta_3 = 4, \varphi = 5, \eta = 5$				
k_{co2}	9.51	8.55	8.01	7.41	6.97
Ra_{co2}	32.166	15.389	9.941	5.739	3.478
ω_{co2}	2.908	2.537	2.329	2.104	1.943

4.4.1 Stabilité de la solution monocellulaire

On considère le cas $Le = 232$, $d = 28.4$, $\delta = 3$ et $\psi > 0$, on rappelle qu'on obtient un écoulement monocellulaire pour $\psi \geq \psi_{mono} = 0.016$. Pour $\psi = 0.2$ la théorie nous donne $Ra_c = 12(1 + 2d\delta) / [1 + \psi(1 + Le + 2d\delta Le)] = 0.26$.

Les figures 4.2 et 4.3 montrent respectivement les isoconcentrations (a), les lignes de courant (b) et les isothermes (c) pour $Le = 232$, $\psi = 0.2$, $Ra = 4$, sans l'influence des parois c'est-à-dire ($\delta = 0$) et en tenant compte de l'influence des parois ($d = 28.4$, $\delta = 3$). Nous notons que la non prise en compte de l'influence des parois sous-estime la séparation des espèces du mélange binaire. Le maximum de séparation (S_{max}) est obtenue pour une valeur optimale de nombre de Rayleigh (Ra_{opt}). Avec le logiciel Maple, nous avons obtenu le nombre de Rayleigh optimal, Ra_{opt} avec une séparation optimale S_{max} pour différentes valeurs de ψ , d , δ et Le . Nous avons trouvé respectivement un nombre Rayleigh optimal et une séparation maximale de $Ra_{opt} = 0.5$ et $S_{max} = 4.58$, lorsqu'on ne tient pas compte de l'influence des parois c'est-à-dire ($\psi = 0.2$, $\delta = 0$, $Le = 232$). Lorsque nous prenons en compte de l'influence des parois c'est-à-dire $\psi = 0.2$, $d = 28.4$, $\delta = 3$, $Le = 232$, nous trouvons un nombre de Rayleigh optimal $Ra_{opt} = 0.8$ et une séparation optimale $S_{max} = 4.27$.

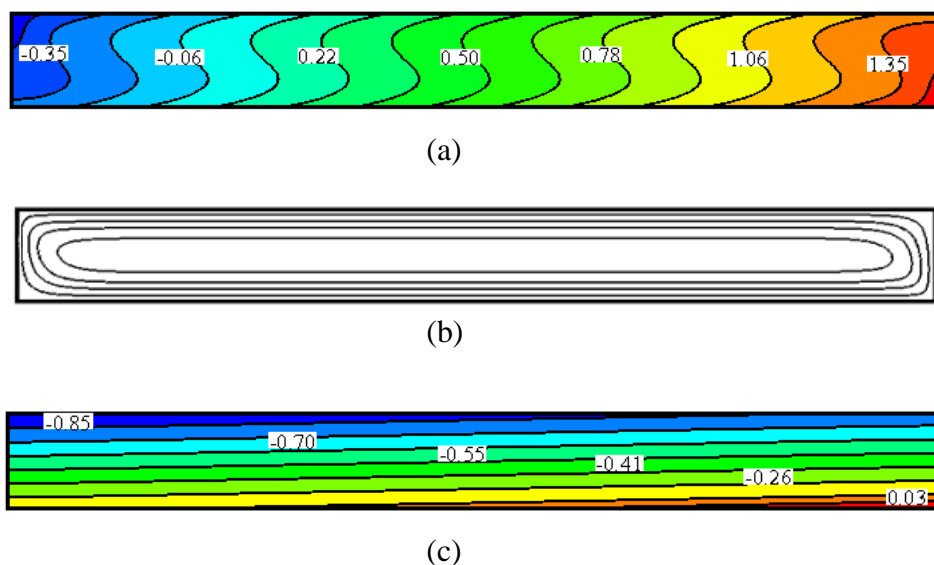
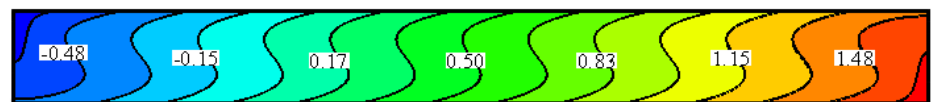


FIGURE 4.2 – (a) Isoconcentrations, (b) Lignes de courant et (c) Isothermes pour $Le = 232$, $\psi = 0.2$, $Ra = 4$, $d = 0$, $\delta = 0$, (sans la prise en compte de l'influence des caractéristiques des parois), $S = 1.86$.

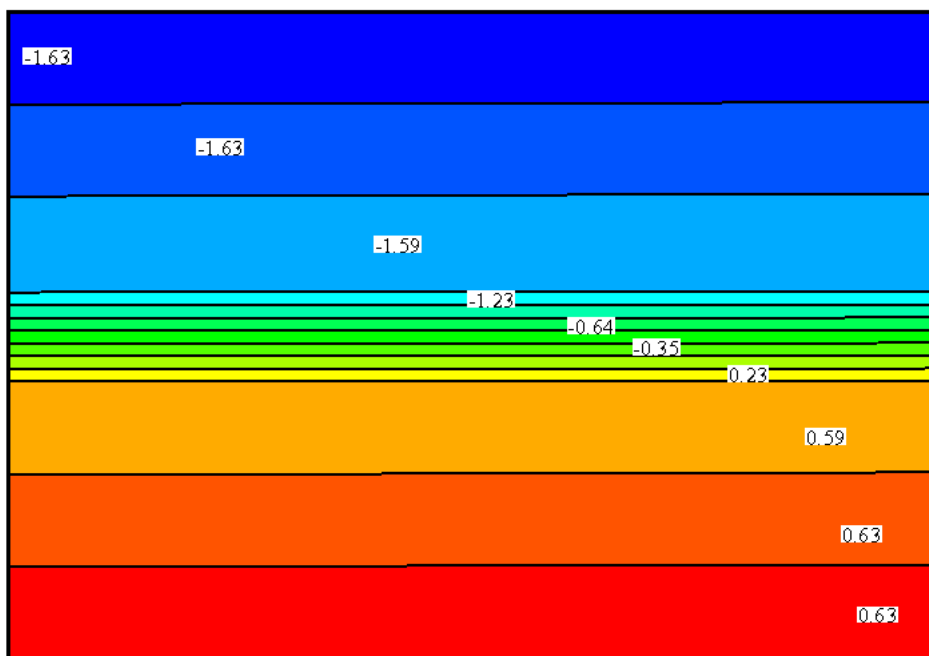
Nous avons utilisé la valeur optimale de nombre de Rayleigh $Ra_{opt} = 0.8$ associée à $Le = 232$, $d = 28.4$, $\delta = 3$ et $\psi = 0.2$ pour tracer les isoconcentrations (figure 4.4a), les lignes de courant (figure 4.4b) et les isothermes (figure 4.4c). On trouve un écoulement monocellulaire avec des



(a)



(b)



(c)

FIGURE 4.3 – (a) Isoconcentrations, (b) Lignes de courant et (c) Isothermes pour $Le = 232$, $\psi = 0.2$, $Ra = 4$, $d = 28.4$, $\delta = 3$, (avec la prise en compte de l'influence des caractéristiques des parois), $S = 2.24$.

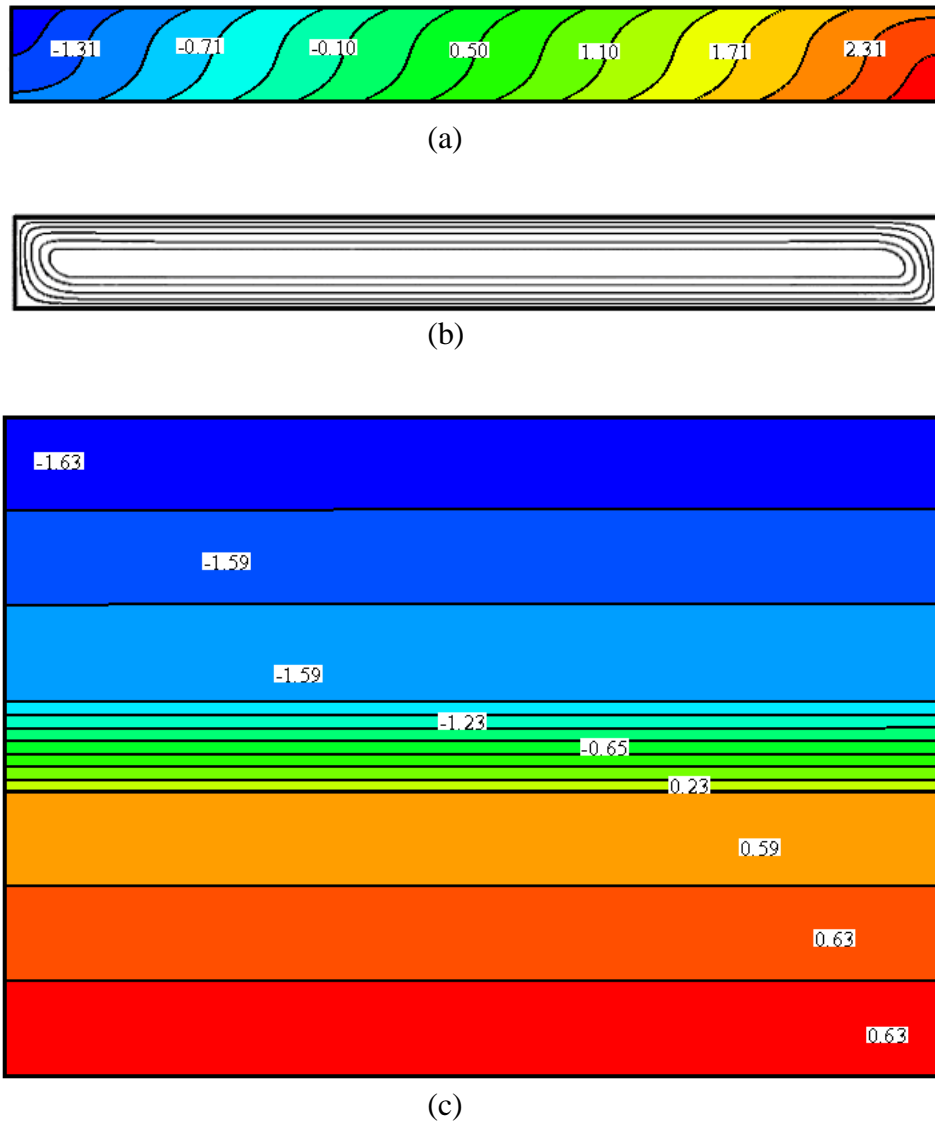


FIGURE 4.4 – (a) Isoconcentrations, (b) Lignes de courant et (c) Isothermes pour $Le = 232$, $\psi = 0.2$, $Ra_{opt} = 0.8$, $d = 28.4$, $\delta = 3$, $S = 4.27$.

isothermes horizontales. Par thermodiffusion le constituant le plus lourd du mélange migre vers la paroi froide c'est-à-dire la paroi du haut de la cellule, le constituant le plus léger migre vers la paroi chaude du bas de la cavité. L'écoulement monocellulaire convecte l'un des constituants du mélange vers la partie droite et l'autre vers la partie gauche de la cavité, et conduit à une stratification horizontale du champ de concentration. Pour Ra_{opt} , le couplage entre les deux phénomènes, la thermodiffusion et la convection est optimal. Lorsque Ra est très inférieur à Ra_{opt} , la convection est faible et la séparation dans ce cas est faible. Si Ra est supérieur à Ra_{opt} , la convection est intense et l'écoulement remélange les constituants du mélange et on obtient une faible séparation également.

La figure 4.5 présente la variation de la séparation en fonction du nombre de Rayleigh Ra , pour $Le = 232$ et $\psi = 0.2$ avec une prise en compte de l'influence ($d = 28.4$, $\delta = 3$) ou sans l'influence des parois ($\delta = 0$). La solution analytique, prédite par notre étude, représentée par le trait continu est en très bon accord avec les résultats numériques représentés par des symboles. La séparation est définie comme étant la différence des fractions massiques du constituant le plus lourd entre les deux extrémités gauche et droite de la cellule soit $S = C_S.A$.

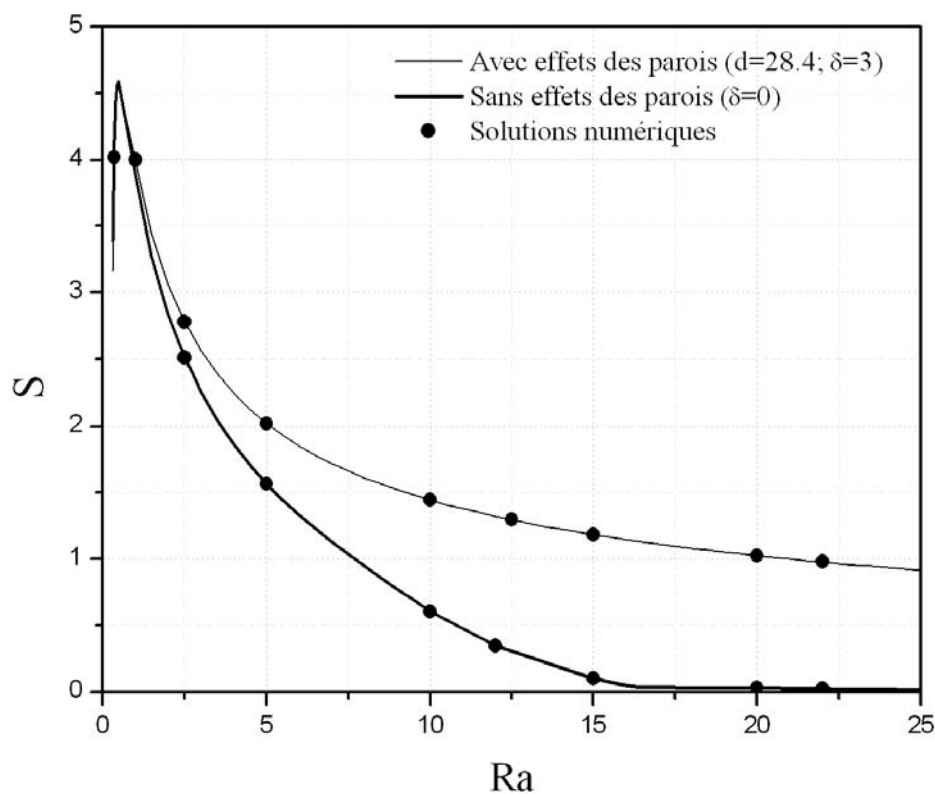


FIGURE 4.5 – Courbes de la séparation en fonction du nombre de Rayleigh pour $Le = 232$, $\psi = 0.2$, $d = 28.4$, $\delta = 3$ (avec la prise en compte des caractéristiques des parois) et pour $Le = 232$, $\psi = 0.2$, $\delta = 0$ (sans la prise en compte des caractéristiques des parois).

La séparation est définie comme étant la différence des fractions massiques du constituant le plus lourd entre les deux extrémités gauche et droite de la cellule soit $S = C_S A$. Il faut noter que, dû à la valeur de référence choisie pour rendre la fraction massique adimensionnelle, la séparation peut être supérieure à 1. On remarque que la séparation présente un maximum, ce maximum correspond au couplage optimale entre la convection et la thermodiffusion. Nous obtenons la même valeur optimale avec ou sans prise en compte de l'influence des parois. On trouve en tenant compte ou pas de l'influence des parois délimitant la couche poreuse, pour $Ra = 4$ les valeurs de séparation respectives $S = 2.24$ et $S = 1.86$. À partir des courbes de cette figure 4.5, nous pouvons dire qu'en tenant compte de l'effet des parois délimitant la couche poreuse, il est possible de séparer les constituants d'un mélange binaire pour une large gamme du nombre de Rayleigh.

La figure 4.6 montre respectivement les isoconcentrations (a) et les lignes de courant (b) obtenues juste avant la transition solution de monocellulaire-solution multicellulaire pour $Le = 232$, $d = 28.4$, $\delta = 3$ et $\psi = 0.2$.

L'étude numérique de la stabilité linéaire de la solution monocellulaire pour $Le = 232$, $d = 28.4$, $\delta = 3$ et $\psi = 0.2$ montrent qu'à la transition solution de monocellulaire-solution multicellulaire, le nombre de Rayleigh critique est $Ra_{cs2num} = 9.52$ avec la formation de 13 rouleaux convectifs (cf. figure 4.7), ce qui correspond à un nombre d'onde critique en cellule infinie de $k_{cs2num} = \frac{n\pi}{A} = 4.08$ (où n est le nombre de rouleaux selon $\vec{o}\vec{x}$). La figure 4.7 montre respectivement les isoconcentrations (a) et les lignes de courant (b) trouvées pour cette étude.

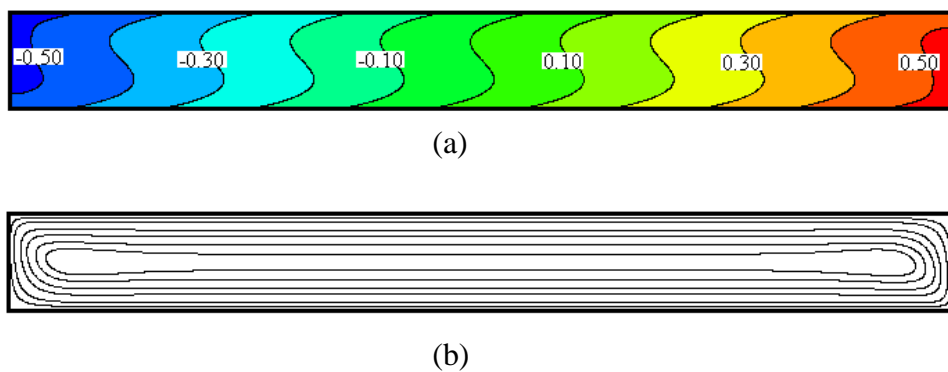


FIGURE 4.6 – (a) Isoconcentrations, (b) et Lignes de courant pour $Le = 232$, $\psi = 0.2$, $d = 28.4$, $\delta = 3$, $Ra_{cs2num} = 9.51$.

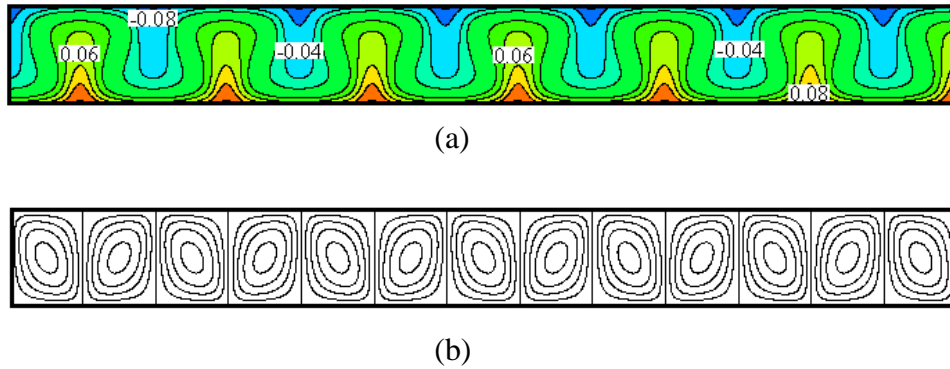


FIGURE 4.7 – (a) Isoconcentrations, (b) et Lignes de courant pour $Le = 232$, $\psi = 0.2$, $d = 28.4$, $\delta = 3$, $Ra_{cs2num} = 9.52$.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié analytiquement et numériquement le transfert de chaleur et de masse dans une cellule poreuse horizontale saturée par un fluide binaire et soumise à un flux thermique constant uniforme le long des parois horizontales dans le cas où les parois sont supposées sans épaisseurs ou infiniment conducteurs ou d'épaisseurs finies et de conductivité thermique différente de celle de la couche poreuse.

Nous avons étudié la stabilité de l'écoulement monocellulaire obtenu pour $\psi \geq \psi_{mono}$, lorsque la solution d'équilibre perd sa stabilité. Si le facteur de séparation est positif et supérieur à une certaine valeur ψ_{mono} , il a été démontré qu'il est possible de séparer les espèces du mélange binaire entre les deux extrémités de la cellule horizontale.

Nous avons montré que la séparation des espèces d'un mélange binaire en milieu poreux est sous estimée lorsqu'on ne tient pas compte de l'effet des parois délimitant la couche poreuse. Les simulations numériques réalisées dans notre étude sont en bon accord avec les résultats analytiques obtenus.

Chapitre 5

Séparation thermodiffusionnelle des constituants d'un nanofluide à base de nanotubes de carbone

RÉSUMÉ

Ce chapitre est une introduction aux propriétés des nanotubes de carbone. Une brève revue de littérature sur les nanotubes de carbones est abordée. Des expériences de la thermodiffusion sont également conduites dans le but de séparer trois types de nanotubes de carbone.

5.1 Introduction

Avec les progrès en nanotechnologie, des particules de taille nanométriques peuvent être obtenues. Une fois ces nanoparticules fabriquées, il fallait réaliser convenablement les dispersions dans le liquide de base en vue d'améliorer sa conductivité thermique. Une suspension de nanoparticules dans un fluide de base est appelée nanofluide. Ce terme pour décrire le mélange était introduit par Choi [35] en ouvrant la porte à une nouvelle variété de fluides de conductivité thermique supérieure à celle du fluide de base. Plusieurs travaux ont révélé que la conductivité thermique des fluides contenant des nanoparticules pourrait augmenter de plus de 20% dans le cas d'une concentration très faible de nanoparticules. Choi et al. [36] ont montré que l'adjonction de certains types de nanoparticules dans un liquide, même en très faible proportion ($< 1\%$ en volume), est capable d'augmenter la conductivité thermique de ce dernier de 150% dans le cas de nanotubes de carbone. En raison de leurs petites tailles, les nanoparticules s'écoulent facilement et, en conséquence, l'obstruction de canaux et l'érosion des parois n'est plus un problème. Il est même possible d'utiliser les nanofluides dans les microcanaux ([85, 35]). À partir

de ces applications dans le domaine du transfert de chaleur, les nanoparticules sont intéressantes pour des applications magnétiques, électriques, chimiques et biologiques. Grâce à leurs propriétés d'amélioration du transfert thermique, les nanofluides peuvent être utilisés dans une multitude d'applications d'ingénierie (dans l'industrie de transport, dans le génie biomédical, le refroidissement des composantes microélectronique, etc.).

5.2 État de l'art sur les nanofluides

Au cours des 10 dernières années, une nouvelle classe de fluides constitués de nanoparticules métalliques en suspension dans un liquide, appelés nanofluides, est apparue. Les nanoparticules les plus utilisées dans la recherche sur les nanofluides sont Al_2O_3 , CuO , TiO_2 , Ag , Au , Cu , Fe et les nanotubes de carbone (NTC). Les fluides de base communément utilisés dans la préparation des nanofluides sont ceux d'usage commun dans les applications de transfert de chaleur à savoir l'eau, l'éthylène, le glycol et l'huile de moteurs. Afin d'améliorer la stabilité des nanoparticules à l'intérieur du fluide de base, certains additifs sont ajoutés au mélange en petites quantités. Les nanoparticules utilisées dans la préparation des nanofluides ont généralement un diamètre inférieur à 100 nm. Lorsque les particules ne sont pas sphériques, mais en forme de barre ou de tube, le diamètre est encore plus faible, mais la longueur des particules peut être de l'ordre du micromètre. Notons également qu'en raison du phénomène de la formation en grappes, des particules peuvent former des grappes avec des tailles de l'ordre du micromètre.

Afin de prédire la conductivité thermique de nanofluides, de nombreux modèles théoriques ont été développés récemment. Cependant, il existe toujours une controverse sur l'interprétation de l'amélioration de la conductivité thermique des nanofluides. Ainsi, aucun des modèles théoriques développé ne peut complètement expliquer l'amélioration de conductivité thermique dans les nanofluides [101]. D'autre part, certains chercheurs ont rapporté des données expérimentales de la conductivité thermique qui est compatible avec les prédictions des modèles classiques (comme le modèle de Hamilton et Crosser [61]). Pour les travaux de recherche portant sur le transfert de chaleur et les propriétés des nanofluides, il faut se référer aux études de Eastman et al. [50], Maïga et al. [77] et Wang et Mujumdar [132].

Certains travaux théoriques et expérimentaux ont conduit à la détermination de la conductivité thermique de ces nanotubes de carbone ($3000W/m.K$ pour les nanotubes de carbone multi-feuillets et $6000W/m.K$ pour les nanotubes de carbone mono-feuillet [14]. Ce sont les études portant sur les nanofluides à base de nanotubes de carbone qui ont montré les augmentations de conductivité thermique les plus élevées. Ces dernières sont de l'ordre plus de 160% pour des concentrations en volume de 1% [36]. Cette augmentation de conductivité thermique peut être prédite par la théorie du milieu effectif qui prévoit de fortes augmentations de conductivité thermique pour des fluides contenant des nanoparticules ayant un grand rapport d'aspect [68]. La principale difficulté rencontrée avec les nanofluides à base de nanotubes de carbone est de

dispenser de manière stable dans le temps les nanotubes de carbone dans le liquide de base [133].

Le problème de la convection naturelle dans une cavité différentiellement chauffée remplie de nanofluides a été étudié numériquement par Khanafer et al. [70]. Ils ont utilisé respectivement les modèles de Brinkman [26] et de Wasp pour évaluer la viscosité et la conductivité effective du nanofluide. La convection naturelle de nanofluides dans une cavité rectangulaire horizontale a été numériquement étudiée par Bennacer et al. [12], en tenant compte de l'effet Soret. Ils ont proposé une formulation modifiée des équations de conservation régissant l'écoulement et le transfert de chaleur dans les nanofluides, prenant en compte des changements importants de la conductivité thermique et de la viscosité du nanofluide ainsi que la variation spatiale de la concentration de nanoparticules induite par l'effet Soret. Les résultats ont montré que la prise en compte de l'effet Soret augmente le transfert de chaleur dans les nanofluides.

Patel et al. [102] ont proposé une nouvelle approche pour déterminer la conductivité thermique du nanofluide à base de nanotubes de carbone. Le modèle prévoit une variation linéaire de la conductivité thermique du nanofluide à base de nanotubes de carbone avec la fraction volumique, ce qui correspond avec les données expérimentales.

Les résultats expérimentaux obtenus par Donzelli et al. [48] ont montré le rôle important que peut jouer la thermodiffusion dans les nanofluides. Ils ont montré qu'en ajoutant une petite quantité de nanoparticules thermophiles à l'eau, le processus de la convection de Rayleigh-Bénard changeait radicalement. Elhajjar et al. [54] ont étudié l'influence des nanoparticules sur le transfert de chaleur conductif et convectif. Contrairement à ce que de nombreux auteurs ont obtenus, Ils ont montré que dans la configuration de Rayleigh-Bénard, après l'apparition de la convection, le transfert de chaleur est plus élevé dans le fluide de base par rapport au nanofluide. Le nombre de Rayleigh dans les nanofluides diminue avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules. Ainsi, les nanoparticules en suspension dans l'eau vont retarder l'apparition de la convection dans ce dernier.

Abu-Nada et al. [1] et Alloui et al. [2] ont constaté que le transfert de chaleur par convection est considérablement affecté par le modèle utilisé pour prédire la viscosité effective du nanofluide. Toutefois, le choix du modèle utilisé pour prédire la conductivité thermique semble être moins importante. Özerinç et al. [101] ont passé en revue les modèles de conductivité thermiques effectifs de nanofluides et ont fait des comparaisons entre des travaux expérimentaux et des prédictions théoriques. Les résultats montrent qu'il existe des divergences significatives entre les données expérimentales disponibles et les prédictions de modèles théoriques. Il existe de nombreuses autres études numériques sur les nanofluides dans la littérature. Wang et Mujumdar [131] fournissent un résumé de ces études numériques et passent aussi en revue quelques études théoriques quant au transfert thermique convectif dans les nanofluides.

Dans cette étude, nous nous intéresserons particulièrement à des nanofluides à base de nanotubes de carbone de conductivité thermique bien supérieure aux autres nanofluides. Dans cette

étude, Nous avons effectué 2 expériences sur deux nanofluides. Le premier est constitué de nanotubes de carbone, d'eau et de Carboxymethylcellulose (CMC) comme dispersant et le second est constitué de nanotubes de carbone et de N-Methyl-2-Pyrrolidone comme fluide de base.

5.3 Les nanofluides à base de nanotubes de carbone

Un nanotube de carbone est une structure cristalline du carbone proche des fullerènes. Ces tubes de quelques nanomètres de diamètre peuvent atteindre plusieurs centaines de micromètres de longueur. Parmi les nanotubes de carbone on distingue les nanotubes de carbone mono-feuillet et les nanotubes multi-feuillets qui diffèrent de part leur structure, leur taille et à fortiori leurs propriétés physico-chimiques. Les nanotubes de carbone multi-feuillets ou MultiWall NanoTubes (MWNT) ont été identifiés en premier en 1991 par Sumio Iijima, les nanotubes mono-feuillet ou SingleWall NanoTubes (SWNT) ont été découvert deux ans plus tard par Béthune et Iijima.

Les nanotubes de carbone mono-feuillet, se présentent sous la forme d'un graphène, enroulé sur lui-même, décrivant une géométrie tubulaire. Si le nanotube de carbone n'a pas subi de détérioration, une demi-sphère de fullerène forme généralement l'une de ses deux extrémités, tandis que la seconde peut être occupée par une nanoparticule métallique utilisée comme catalyseur pour la synthèse des nanotubes de carbones. Suivant l'orientation des motifs hexagonaux de carbone par rapport à l'axe du tube, il est possible de différencier les divers types SWNT (figure 5.1). Les nanotubes de carbone multi-feuillets sont constitués d'un arrangement concentrique de feuilles de graphène, repliées sur elles-mêmes de manière à former des cylindres (figure 5.2). Cette structure est communément appelée poupée russe, par analogie au jeu de poupées qui s'emboîtent les unes dans les autres. Le diamètre du plus petit tube interne détermine la taille du canal central du nanotube. Le diamètre interne d'un nanotube de carbone multi-feuillets est de l'ordre de deux nanomètres, tandis que le diamètre externe peut atteindre une centaine de nanomètre mais est le plus souvent de l'ordre d'une vingtaine de nanomètres. La structure multi-feuillets concentriques décrite est la plus communément admise, mais ce n'est pas la seule structure possible. Ainsi, les études expérimentales de Zhou et al. [135] laissent envisager que les nanotubes multi-feuillets pourraient être constitués d'une seule feuille de graphène enroulée sur elle-même à la façon d'un rouleau de parchemin. Amelinckx et al. [5] suggèrent dans le cas des gros nanotubes, que les deux types de structures coexistent au sein des tubes multi-feuillets, les tubes de petit diamètre, au centre, présentant une structure de type poupée russe, tandis que les tubes extérieurs possèdent une structure de type rouleau de parchemin. En 2003, une étude de Ruland et al. [116] montre que la structure de type poupée russe est la plus répandue, les nanotubes ne croissent selon le type de rouleau de parchemin que dans des conditions particulières.

Une manière simple de se représenter l'effet de nanotubes de carbone en solution est de consi-

dérer les nanotubes en suspension comme autant de nano-ponts thermiques susceptibles de conduire rapidement l'énergie d'un point à l'autre de l'échantillon comme le montre la figure 5.3.

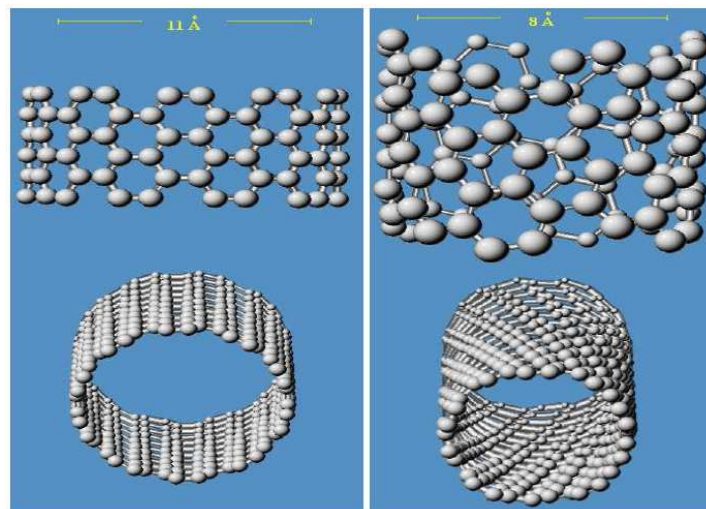


FIGURE 5.1 – Différentes structures de nanotubes identifiées.

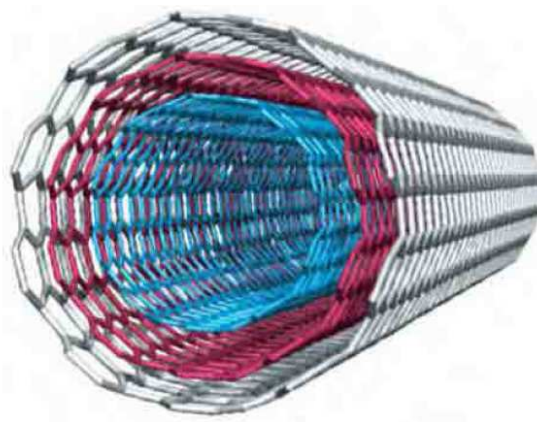


FIGURE 5.2 – Représentation graphique d'un nanotube de carbone multi-feuillets (MWNT).

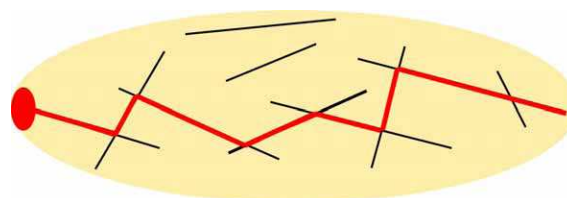


FIGURE 5.3 – Explication schématisée de la création d'un réseau de ponts thermiques (trait rouge) créé par une dispersion de nano-fibres (trait noir) dans un liquide (Beige) qui permet la propagation d'un point chaud (ovale rouge).

5.4 Caractéristiques thermophysiques des nanofluides

Les propriétés thermophysiques (conductivité thermique, masse volumique, la chaleur spécifique, la viscosité dynamique et cinématique, etc.) des fluides de base sont profondément modifiées par l'ajout des nanoparticules. Nous supposons dans notre travail que les nanoparticules sont bien dispersées de façon uniforme et forment une suspension stable dans le fluide de base et qu'elles sont en état d'équilibre thermique avec ce dernier.

La masse volumique d'un nanofluide peut être évaluée en utilisant la relation suivante :

$$\rho_{nf} = (1 - \phi)\rho_{fb} + \phi\rho_{np} \quad (5.1)$$

où ρ_{nf} , ρ_{fb} et ρ_{np} , désignent respectivement les masses volumiques du nanofluide, du fluide de base et des nanoparticules. $\phi = \frac{V_{np}}{V_{np} + V_{fb}}$ désigne la fraction volumique des nanoparticules.

La diffusivité thermique du nanofluide est :

$$a_{nf} = \frac{\lambda_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} \quad (5.2)$$

et la chaleur spécifique du nanofluide est donnée par :

$$(\rho C_p)_{nf} = (1 - \phi)(\rho C_p)_{fb} + \phi(\rho C_p)_{np} \quad (5.3)$$

où $(C_p)_{nf}$, $(C_p)_{fb}$ et $(C_p)_{np}$, désignent respectivement les chaleurs spécifiques du nanofluide, du fluide de base et des nanoparticules.

Le coefficient d'expansion thermique du nanofluide peut être déterminé par la relation :

$$(\rho\beta_T)_{nf} = (1 - \phi)(\rho\beta_T)_{fb} + \phi(\rho\beta_T)_{np} \quad (5.4)$$

où β_{fb} et β_{np} , désignent respectivement les coefficients d'expansion thermique du fluide de base et des nanoparticules.

Il existe plusieurs modèles proposés dans la littérature pour la modélisation de la conductivité thermique et de la viscosité dynamique des nanofluides. Dans ce qui suit, nous allons présenter quelques modèles parmi les plus utilisés.

5.5 La viscosité dynamique des nanofluides

Différentes formules théoriques peuvent être utilisées pour la détermination de la viscosité dynamique des particules en suspension dans un fluide. Il est important de mentionner que presque

toutes les relations existantes sont dérivées du travail fondamental d'Einstein [53] qui a déterminé l'énergie dissipée autour d'une seule particule dans un fluide en associant son énergie avec le travail réalisé pour la faire avancer relativement au fluide. À partir de ce résultat, il a déterminé l'expression qui permet d'obtenir la viscosité d'un fluide comportant des particules en suspension :

$$\mu_{nf} = \mu_{fb}(1 + 2.5\phi) \quad (5.5)$$

où μ_{nf} et μ_{fb} , désignent respectivement les viscosités dynamiques du nanofluide et du fluide de base. Cette formule n'est valable que pour une concentration faible de nanoparticules ($\phi < 2\%$).

Brinkman [26] a proposé une relation similaire à celle d'Einstein mais valable dans une gamme de fraction volumique allant jusqu'à 4%. Son expression est la suivante :

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_{fb}}{(1 + \phi)^{2.5}} \quad (5.6)$$

Ces relations n'intègrent pas les effets du mouvement Brownien ni ceux de la taille des particules.

En prenant en compte l'effet de l'interaction hydrodynamique entre deux particules sphériques, Batchelor [9] a montré que la viscosité n'est pas seulement une fonction linéaire de la fraction volumique des particules, comme l'indique la relation d'Einstein mais une fonction non linéaire de celle-ci avec la présence d'un terme en ϕ^2 :

$$\mu_{nf} = \mu_{fb}(1 + 2.5\phi + 6.5\phi^2) \quad (5.7)$$

Ces formulations ci-dessus expriment que la viscosité dynamique effective d'un fluide qui contient des particules en suspension est fonction de la viscosité du fluide de base et du volume de la fraction des particules.

5.6 La conductivité thermique des nanofluides

En 1873, Maxwell a proposé une formule permettant de calculer la conductivité thermique d'un fluide contenant des particules sphériques. Il a supposé que le fluide renferme plusieurs particules sphériques de même diamètre D_p . Les particules sont séparées d'une distance suffisante conduisant à l'absence d'interaction mutuelle entre elles, par conséquent pas de contact entre les particules. Sa formule est la suivante :

$$\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_{fb}} = \frac{\lambda_{np} + 2\lambda_{fb} + 2(\lambda_{np} - \lambda_{fb})\phi}{\lambda_{np} + 2\lambda_{fb} - (\lambda_{np} - \lambda_{fb})\phi} \quad (5.8)$$

où λ_{nf} et λ_{fb} et λ_{np} désignent respectivement les conductivités thermiques du fluide avec des particules en dispersion, du fluide de base et des particules et ϕ la fraction volumique de particules de faible diamètre dans le fluide de base.

Dans l'expression (5.8), l'effet de la taille et la forme des particules n'a pas été prise en compte dans l'analyse. Hamilton et Crosser [61] ont proposé une amélioration du modèle de Maxwell afin de tenir compte des formes des particules. Pour ce faire, ils ont introduit un facteur géométrique appelé sphéricité Φ faisant référence à la géométrie sphérique pour prendre en compte cette diversité de forme. Ce coefficient Φ , est défini comme le rapport de la surface d'une sphère ayant un volume égal à celui de la particule à la surface de la particule. La relation obtenue est donnée par :

$$\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_{fb}} = \frac{\lambda_{np} + (n-1)\lambda_{fb} - (n-1)(\lambda_{fb} - \lambda_{np})\phi}{\lambda_{np} + (n-1)\lambda_{fb} + (\lambda_{fb} - \lambda_{np})\phi} \quad (5.9)$$

où λ_{nf} et λ_{fb} et λ_{np} désignent respectivement les conductivités thermiques du fluide ensemencé de particules de petites tailles, du fluide de base et des particules. n est un facteur de forme empirique qui est défini comme :

$$n = \frac{3}{\Phi} \quad (5.10)$$

$n = 3$ pour des particules sphériques et $n = 6$ pour des particules cylindriques. Pour $\Phi = 1$ (particule sphérique), la formulation de Hamilton et Crosser redonne celle de Maxwell.

En considérant le cas limite où $n \rightarrow 1$, nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{1}{\lambda_{nf}} = \frac{1-\phi}{\lambda_{fb}} + \frac{\phi}{\lambda_{np}} \quad (5.11)$$

Cette équation (5.11) montre que la conductivité thermique d'un nanofluide est une moyenne harmonique entre celui d'un liquide de base et celui d'une nanoparticule dans le modèle Hamilton et Crosser.

Modèles basés sur les nanocouches

Des études récentes ont montré que les molécules des liquides forment des structures en forme de couches autour de la surface solide d'une nanoparticule ([69]) et il est prévu que ces nanocouches aient une conductivité thermique effective plus grande que le fluide de base [134]. Ce phénomène est illustré schématiquement à la figure 5.4.

Plusieurs modèles ont été développés, en tenant compte des nanocouches autour des nanoparticules. Certains tiennent compte de l'effet du mouvement brownien ainsi que des formations de grappes. Yu et Choi [134] ont présenté un modèle pour la détermination de la conductivité thermique effective des nanofluides en modifiant le modèle de Maxwell [86]. Dans leur modification, ils considèrent les nanocouches formées autour des nanoparticules. La nanoparticule et la couche autour d'elle ont été considérées comme une seule particule pour laquelle la conductivité thermique est calculée en utilisant la théorie du milieu effective [118]. Le résultat a été

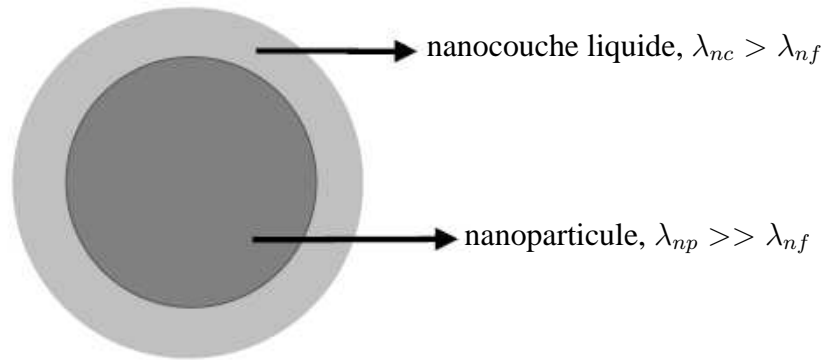


FIGURE 5.4 – Illustration schématique représentant la superposition de liquide autour des nanoparticules. λ_{nc} , λ_{nf} et λ_{np} sont respectivement la conductivité thermique de la nanocouche, du fluide de base, et de la nanoparticule.

substitué dans l'équation de Maxwell en obtenant :

$$\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_{fb}} = \frac{\lambda_{np} + 2\lambda_{fb} + 2\phi(\lambda_{np} - \lambda_{fb})(1 + \gamma)^3}{\lambda_{np} + 2\lambda_{fb} - \phi(\lambda_{np} - \lambda_{fb})(1 + \gamma)^3} \quad (5.12)$$

γ est définie comme :

$$\gamma = \frac{\zeta}{r_{np}} \quad (5.13)$$

où ζ est l'épaisseur de la nanocouche et r_{np} est le rayon de la nanoparticule. La valeur de γ est maintenue fixée à 0.1.

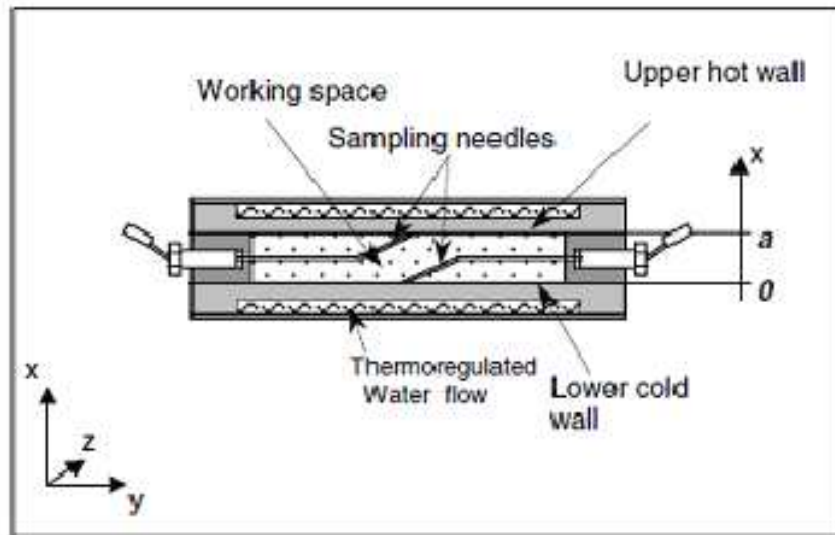
5.7 Étude expérimentale en milieu fluide

Notre but est de déterminer l'existence et éventuellement la grandeur d'un coefficient de thermodiffusion différentiel entre deux types de nanotubes de carbone dans une solution de nanotubes de carbone. Au cours de notre travail expérimental, nous avons repris la cellule utilisée précédemment par Costesèque et al. [44] pour réaliser les expériences de thermodiffusion pure et évaluer le coefficient de Soret d'un mélange binaire. Nos expériences ont été réalisées avec la collaboration du Dr. Pascal Puech du Centre d'Élaboration de Matériaux et d'Étude Structurales (CEMES) et du Dr. Emmanuel Flahaut du Centre Interuniversitaire de Recherche et d'Ingénierie des Matériaux (CIRIMAT) qui ont fourni les solutions de nanotubes de carbone.

5.7.1 Description de la cellule

La cellule expérimentale est constituée de deux plaques parallèles en acier inoxydable, dont l'espacement est maintenu par une entretoise en plexiglas. Ces plaques délimitant un espace de travail parallélépipédique de longueur $L = 38\text{ cm}$, de hauteur $H = 1.5\text{ cm}$ et de profondeur $p = 8\text{ cm}$.

Les plaques sont maintenues à des températures précises ($\pm 0.1^\circ\text{C}$) à l'aide de deux plaques :



(a) Vue transversale de la cellule de thermodiffusion et du dispositif de prélèvement.



(b) Vue extérieure longitudinale de la cellule expérimentale.

FIGURE 5.5 – (a) Coupe transversale vue de la cellule de thermodiffusion et le dispositif de prélèvement ; (b) Vue extérieure longitudinale de la cellule expérimentale.

Pour les deux expériences présentées, nous avons maintenu la paroi supérieure de notre cellule

à une température de 42°C et refroidi la paroi inférieure en maintenant sa température à 22°C . Pour l'exploitation des résultats, nous avons utilisé la spectroscopie Raman.

5.7.2 La spectrométrie Raman

La spectrométrie Raman est une technique optique d'observation des matériaux. Elle consiste à analyser la lumière diffusée inélastiquement par la matière (phénomène faible, impliquant un photon sur un milliard). Le principe est le suivant : le photon incident crée un dipôle, qui est modulé par une excitation élémentaire (généralement une vibration), avant d'être émis par le dipôle. C'est un processus à 3 étapes qui satisfait les règles de conservation en énergie et en vecteur d'onde. Dans le cas exceptionnel du carbone, du fait de la structure de bande très particulière (structure électronique en cône au voisinage du point K), un processus à 4 étapes est aussi visible. Le photon peut gagner de l'énergie (processus anti-Stokes) ou en perdre (processus Stokes). On représente, du fait de sa plus grande probabilité, la partie associée à la perte d'énergie (processus Stokes) que l'on gradue habituellement en cm^{-1} , unité pratique dont une unité équivaut à $0,124\text{ meV}$ ou encore $3.00 \times 10^{11}\text{ Hz}$. Afin d'avoir un signal important, il faut collecter la lumière diffusée inélastiquement dans un angle solide important, d'où l'utilisation de microscope avec des objectifs ayant des ouvertures numériques typiquement de 0,5. La puissance incidente pour une solution varie de 10 à 1 mW et un temps d'acquisition de 1 à 200 secondes. La longueur d'onde d'excitation peut aller de l'UV à l'infrarouge afin de s'affranchir de la luminescence ou de signaux trop intenses associés à une des phases présentes.

Les nanotubes de carbone sont des structures unidimensionnelles. La quantification de l'énergie suivant le diamètre permet d'avoir une augmentation considérable du signal Raman quand l'énergie du laser est proche d'une des énergies quantifiées $E(\text{eV}) = ii \times 0.8/d(\text{nm})$ avec ii un entier (multiple de 3 pour les nanotubes métalliques, différent d'un multiple de 3 pour les nanotubes semi-conducteurs) et d le diamètre du nanotube. Pour les nanotubes mono ou bi-parois, le signal Raman est dominé par le signal des nanotubes en résonance, supplantant largement le signal des nanotubes hors résonance. Lorsque le diamètre est grand, cet effet de quantification n'est plus présent et l'amplification du signal devient négligeable. La profondeur de pénétration de la lumière dans le visible correspond à environ 90 couches de graphène. La largeur de la bande G est un point très important. Le nanotube monoparoi est dominé par un signal composé de 2 pics, l'un dominant avec une largeur à mi-hauteur de 10 cm^{-1} alors que le signal Raman du nanotube bi-paroi est composé d'une bande plus large, typiquement 20 cm^{-1} . Il est possible de faire une analyse plus fine d'une solution en séchant celle-ci puis en utilisant de l'acide sulfurique. Les modes à petit nombre d'onde de respiration (Radial Breathing Modes en anglais et noté RBM) permettent de remonter à la composition de l'échantillon. Ils apparaissent uniquement lors d'une résonance électronique et servent en conséquence à analyser localement le tri entre les nanotubes métalliques et les nanotubes semi-conducteurs.

5.7.3 Expérience 1 : Carboxymethylcellulose + Nanotubes de Carbone (NTC) + Eau

Le Carboxymethylcellulose ou CMC (agent dispersant) est un polymère issu de la cellulose naturelle. Contrairement à la cellulose, le CMC est très soluble dans l'eau. L'échantillon de nanotubes de carbone (NTC) contient environ 80% de double parois, 15% de simple paroi et 5% de triple parois. L'expérience a duré 7 jours.



FIGURE 5.6 – Observation après prélèvement à la fin de l'expérience 1.

Observations générales :

- Dans le liquide prélevé au niveau de la paroi inférieure, la concentration de nanotubes de carbone est supérieure à celle prélevée au niveau de la paroi supérieure.
- La viscosité du liquide est différente, la solution de fond est plus visqueuse.
- La tension superficielle est différente pour la solution prélevée au bas, il y a peu de mouillage de la surface du quartz.

Observations du spectre de Raman :

- La composition des solutions prélevées est la même en terme de proportionnalité de nanotubes de carbone de type mono ou multiple paroi puisqu'on observe le même mode pour les bandes RBM à 150 cm^{-1} , le même pour les bandes D, G et 2D à des longueurs d'onde respectives de $\lambda = 532\text{ nm}$ et $\lambda = 632\text{ nm}$ (Fig. 5.7).

Un zoom sur la bande G ne révèle aucun changement de forme des nanotubes de carbone.

- Le mélange eau / CMC au niveau du bas de la cellule présente une plus grande concentration globale de nanotubes de carbone, toutes variétés confondues.

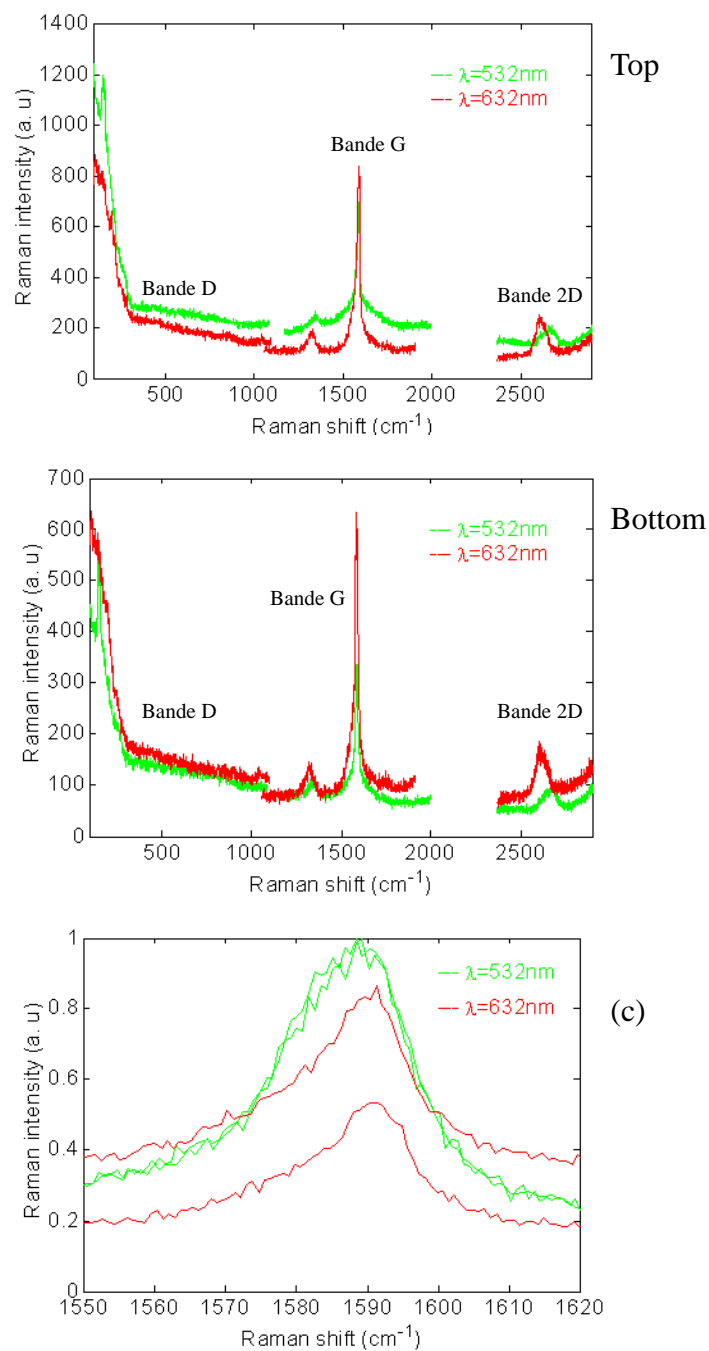


FIGURE 5.7 – Spectre de Raman pour l'expérience 1 obtenu à 150 cm^{-1} pour la face chaude (paroi haute) et la face froide (paroi basse). La figure (c) représente un zoom de la Bande G.

5.7.4 Expérience 2 : N-Methyl-2-Pyrrolidone (NMP)+ Nanotubes de Carbone (NTC)

L'échantillon de nanotubes de carbone (NTC) contient environ 80% de double paroi, 15% de simple paroi et 5% de triple paroi. Le fluide de base utilisé est N-Methyl-2-Pyrrolidone. L'expérience a duré 7 jours. Nous avons pris soin de faire vibrer la solution par ondes ultrasonores une semaine avant l'expérience. Il n'y a pas eu d'agglomération de particules avant l'expérience. La longueur d'onde excitante est de 638 nm. À la longueur d'onde 532 nm, nous n'avons observé aucun signal des nanotubes de carbones tandis qu'à la longueur d'onde 785 nm, nous avons observé un bon signal des nanotubes de carbones. Le temps d'exposition a été de 200 secondes.

Observations visuelles :

- La solution n'a pas été stable pendant l'expérience.
- Plusieurs agglomérations sont visibles. Il a été déjà observé que la solution NMP-NTC n'était pas stable sous éclairage mais dans une bouteille opaque afin d'éviter tout contact avec la lumière, aucune sédimentation n'était présente lorsque nous avons rempli la cellule.

Expériences de Raman appliquées à la cellule :

Il est très difficile d'effectuer des expériences de Raman fiables à cause de l'agglomération des nanotubes de carbones. Sans vibration par ondes sonores de la solution, la quantité de nanotubes de carbones est plus faible dans la partie supérieure de la cellule que dans sa partie inférieure. Cette différence est due soit à la gravité ou soit à la précipitation dépendant de la température (figure 5.8). Comme l'intensité Raman fluctue dans l'échelle de plusieurs secondes, cette conclusion est seulement une tendance qui doit être validée par une autre expérience. La forme de la bande G est la même pour les solutions prélevées au niveau des parois inférieure et supérieure de la cellule expérimentale, ce qui suggère qu'il n'y a aucun effet de tri des variétés de nanotubes de carbone.

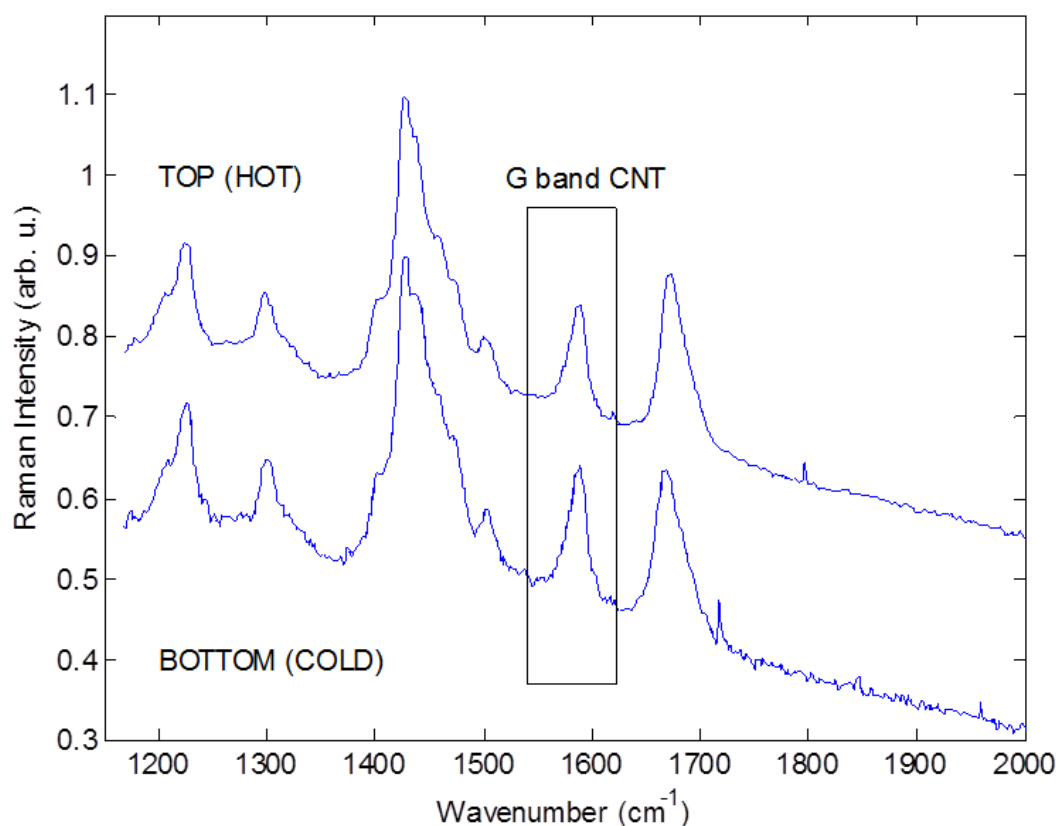


FIGURE 5.8 – Spectre de Raman obtenu pour l'expérience N-Methyl-2-Pyrrolidone + Nanotubes de carbone.

5.8 Conclusion

Après séchage des échantillons prélevés et après pesée, il n'a pas été possible de quantifier l'importance de la séparation. Il est possible que la présence du dispersant qui lui-même différencié par thermodiffusion dans l'expérience (cf. valeurs très différentes de la tension superficielle entre le haut et le bas de la cellule) a perturbé la séparation des 3 variétés de nanotubes de carbones. C'est pour cela que nous avons repris l'expérience et cette fois ci, avec un seul fluide de base le N-Methyl-2-Pyrrolidone, en présence des 3 nanotubes de carbones (15% simple paroi, 80% double paroi, 5% triple paroi).

Cette expérience avec le N-Methyl-2-Pyrrolidone et des nanotubes de carbones n'a pas été concluante à cause de l'agglomération des nanotubes de carbones dans la solution (température moyenne trop élevée ?). Nous prévoyons une nouvelle expérience avec la solution NMP-NTC et

nous devons mieux étudier, en fonction de la température le mécanisme d'agglomération. Nous pourrions aussi envisager une configuration couplée gravitation thermodiffusion qui amplifie la séparation due à l'effet Soret seul.

Chapitre 6

Conclusions générales et perspectives

Cette étude constitue une contribution au problème de la séparation par diffusion thermogravitationnelle des constituants d'une solution binaire dans une cavité rectangulaire remplie d'un milieu poreux saturé par un mélange binaire. Nous avons présenté une étude analytique et numérique de l'influence des parois délimitant la couche poreuse sur la séparation des constituants d'un mélange binaire.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous avons présenté les principaux travaux sur la convection thermosolutale et sur la prise en compte de l'effet des propriétés thermophysiques des parois délimitant la couche poreuse sur la convection.

Dans le chapitre 2, nous explicitons la définition des paramètres caractérisant un milieu poreux ainsi que les différents modèles utilisés pour la modélisation des écoulements en milieu poreux.

Dans le chapitre 3, on présente une étude analytique et numérique de la convection thermosolutale avec prise en compte de l'effet Soret en couche poreuse horizontale de grande extension saturée par un fluide binaire. La couche poreuse est délimitée par deux parois dont on prend en compte l'épaisseur et la conductivité thermique. On a étudié en particulier la stabilité linéaire de la solution d'équilibre dans le cas d'une couche poreuse horizontale d'extension infinie, lorsqu'on applique un flux uniforme aux niveaux des parois. Dans le cas stationnaire, nous avons calculé analytiquement le nombre de Rayleigh critique et le nombre d'onde critique en fonction du facteur de séparation ψ pour différentes valeurs du nombre de Lewis Le , du rapport de conductivité thermique d et du rapport de l'épaisseur des plaques sur l'épaisseur de la couche poreuse δ . Lorsque le nombre de Rayleigh est négatif (cellule chauffée par le haut), la première bifurcation est stationnaire et $Ra = 12(1 + 2d\delta) / [1 + \psi(2Le d\delta + Le + 1)]$ pour $\psi < 0$, alors que la solution d'équilibre est infiniment linéairement stable pour $\psi > 0$. Lorsque le nombre de Rayleigh Ra est positif (cellule chauffée par le bas), nous avons distingué deux zones en fonction de la valeur du facteur de séparation, ψ . Pour $\psi < 0$, la première bifurcation est une bifurcation de Hopf. Pour $\psi \in [0, \psi_{mono}]$ le nombre de Rayleigh critique et le nombre d'onde critique diminuent avec ψ à partir des valeurs 35.17 et 2.79 respectivement

pour le cas $Le = 5$, $d = 5$, $\delta = 1$ et à partir de 38.62 et 3.07 respectivement pour le cas $Le = 232$, $d = 28.4$, $\delta = 3$. Sur cette gamme de variation du facteur de séparation, il n'a pas été possible d'établir les expressions analytiques des nombres de Rayleigh et d'onde critique.

Pour $\psi \in [\psi_{mono}, +\infty]$, la bifurcation est stationnaire caractérisée par le nombre de Rayleigh critique, $Ra_{cs} = 12(1 + 2d\delta) / [1 + \psi(2Le d\delta + Le + 1)]$ avec le nombre d'onde critique $k_{cs} = 0$. Pour les bifurcations de Hopf, les paramètres critiques dépendent fortement de la porosité normalisée. Le rôle que joue la porosité est très important. Lorsqu'elle diminue, la stabilité de la solution d'équilibre se trouve renforcée. Plusieurs simulations numériques ont été réalisées afin de corroborer les résultats obtenus avec les résultats de stabilité linéaire de la solution d'équilibre. Un très bon accord a été trouvé entre les valeurs critiques obtenues analytiquement et celles obtenues numériquement par la méthode spectrale Tau.

Dans le chapitre 4, nous avons dans la première partie déterminé la solution analytique donnant le champ thermique et massique associé à l'écoulement de type parallèle en cellule poreuse de grande extension, puis nous avons étudié la stabilité linéaire de la solution monocellulaire. Ensuite, dans la seconde partie, nous avons étudié l'influence des parois délimitant la couche poreuse sur la séparation dans une cavité poreuse saturée par un mélange binaire et chauffée par le bas. Nous avons montré que la prise en compte des caractéristiques thermophysiques et géométriques des parois, modifie l'importance de la séparation uniquement pour des valeurs de nombre de Rayleigh supérieure au nombre de Rayleigh conduisant au maximum de séparation. Ce maximum reste le même avec ou sans la prise en compte des propriétés des parois.

Dans le chapitre 5, nous avons conduit deux expériences avec deux types de nanofluides. Dans la première expérience, trois variétés de nanotubes de carbone (simple paroi, double paroi et triple paroi) sont dispersées dans de l'eau comme fluide de base et du Carboxymethylcellulose comme dispersant. Dans la seconde, nous avons utilisé les mêmes variétés de nanotubes de carbone mais avec du N-Méthyl-2-Pyrrolidone comme fluide de base. Nous n'avons pas pu séparer les nanotubes de carbones mono-couche des autres variétés de nanotubes par suite de la sensibilité thermogravitationnelle (inconnue) du dispersant lui-même pour la première expérience et ensuite à cause de l'agglomération parasite des nanotubes de carbone dans la solution pour la seconde expérience.

Nous avons réalisé une étude de stabilité linéaire de la solution d'équilibre au chapitre 3. Une étude de stabilité faiblement non-linéaire permettrait d'établir la nature des différentes bifurcations et de compléter les diagrammes de bifurcation.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'effet des parois délimitant la couche poreuse sur la séparation des constituants. Il serait souhaitable de prendre en considération un autre paramètre, le temps de séparation. En effet, afin de pouvoir utiliser ce processus de séparation thermogravitationnelle dans des procédés industriels, il faut que les temps de séparation ne soient pas trop longs par rapport aux processus classiques actuellement utilisés qui, varient de quelques jours à quelques mois.

Dans une thématique aussi riche que celle-ci, de nombreuses perspectives restent bien entendu ouvertes. En premier lieu, il faudrait reprendre cette étude en considérant une couche fluide et voir les conclusions que l'on peut en tirer.

Annexe A

Détermination des paramètres critiques $(Ra_{co}, k_{co}, \omega_{co})$ de la bifurcation de Hopf par la méthode spectrale Tau pour différentes valeurs de ϵ , d , δ , Le et ψ .

TABLE A.1 – Valeurs critiques du nombre de Rayleigh Ra_{co} , du nombre d’onde k_{co} et de la pulsation ω_{co} pour la bifurcation instationnaire, pour $\epsilon = 0.3$, $d = 5$, $Le = 5$, $\delta = 1$ et pour différentes valeurs du facteur de séparation ψ (Méthode spectrale Tau à l’ordre 5).

ψ	$N = 4$			$N = 5$		
	k_{co}	Ra_{co}	ω_{co}	k_{co}	Ra_{co}	ω_{co}
-0.03	2.423	51.336	0.929	2.422	51.337	0.916
-0.04	2.419	53.237	2.652	2.380	53.244	2.693
-0.05	2.415	55.287	3.693	2.382	55.296	3.691
-0.06	2.411	57.502	4.550	2.416	57.507	4.550
-0.07	2.406	59.905	5.319	2.410	59.912	5.319
-0.08	2.402	62.518	6.039	2.405	62.528	6.039
-0.09	2.397	65.373	6.730	2.399	65.384	6.729
-0.10	2.391	68.504	7.405	2.393	68.518	7.405
-0.11	2.386	71.955	8.078	2.388	71.970	8.079
-0.12	2.379	75.776	8.751	2.381	75.792	8.751
-0.13	2.373	80.032	9.438	2.375	80.049	9.439
-0.14	2.365	84.801	10.138	2.367	84.819	10.139
-0.15	2.357	90.184	10.864	2.359	90.206	10.866
-0.16	2.349	96.308	11.625	2.353	96.328	11.636
-0.17	2.340	103.340	12.426	2.342	103.362	12.428
-0.18	2.329	111.499	13.272	2.331	111.521	13.274
-0.19	2.318	121.085	14.188	2.320	121.102	14.189
-0.20	2.305	132.510	15.180	2.307	132.517	15.179
-0.21	2.292	146.371	16.284	2.294	146.379	16.283
-0.22	2.276	163.550	17.514	2.278	163.544	17.510
-0.23	2.259	185.420	18.932	2.262	185.414	18.934
-0.24	2.240	214.245	20.604	2.243	214.219	20.602
-0.25	2.219	253.043	22.656	2.223	254.004	22.657
-0.26	2.2197	312.721	25.325	2.202	312.663	25.324
-0.27	2.180	408.321	29.171	2.187	408.269	29.170
-0.28	2.186	593.087	35.785	2.197	593.266	35.781

TABLE A.2 – Valeurs critiques du nombre de Rayleigh Ra_{co} , du nombre d'onde k_{co} et de la pulsation ω_{co} pour la bifurcation instationnaire, pour $\epsilon = 0.4$, $d = 5$, $Le = 5$, $\delta = 1$ et pour différentes valeurs du facteur de séparation ψ (Méthode spectrale Tau à l'ordre 5).

ψ	$N = 4$			$N = 5$		
	k_{co}	Ra_{co}	ω_{co}	k_{co}	Ra_{co}	ω_{co}
-0.025	2.495	46.600	1.028	2.494	46.600	1.027
-0.028	2.494	46.977	1.565	2.492	46.977	1.565
-0.03	2.493	47.232	1.841	2.490	47.231	1.842
-0.04	2.490	48.547	2.868	2.473	48.552	2.865
-0.05	2.487	49.939	3.648	2.490	49.942	3.648
-0.06	2.483	51.412	4.320	2.486	51.417	4.320
-0.07	2.480	52.974	4.931	2.482	52.980	4.931
-0.08	2.477	54.634	5.504	2.479	54.642	5.504
-0.09	2.473	56.401	6.050	2.475	56.410	6.051
-0.10	2.470	58.286	6.582	2.471	58.295	6.581
-0.11	2.466	60.301	7.102	2.467	60.312	7.102
-0.12	2.463	62.460	7.620	2.464	62.471	7.619
-0.13	2.459	64.779	8.135	2.460	64.790	8.134
-0.14	2.455	67.277	8.652	2.456	67.288	8.651
-0.15	2.452	69.974	9.179	2.453	69.985	9.178
-0.16	2.448	72.896	9.712	2.449	72.908	9.711
-0.17	2.444	76.072	10.257	2.445	76.084	10.256
-0.18	2.440	79.537	10.818	2.441	79.550	10.817
-0.19	2.437	83.332	11.403	2.438	83.345	11.402
-0.20	2.433	87.507	12.007	2.434	87.519	12.005
-0.21	2.429	92.122	12.644	2.432	92.135	12.647
-0.22	2.425	97.251	13.302	2.427	97.264	13.305
-0.23	2.422	102.983	14.010	2.424	102.991	14.012
-0.24	2.419	109.434	14.765	2.421	109.443	14.766
-0.25	2.415	116.746	15.567	2.417	116.756	15.567
-0.26	2.413	125.105	16.448	2.415	125.110	16.446
-0.27	2.410	134.753	17.400	2.412	134.757	17.396
-0.28	2.409	146.013	18.464	2.412	146.023	18.466
-0.29	2.408	159.328	19.647	2.411	159.343	19.646
-0.30	2.409	175.314	20.998	2.413	175.335	21.002

TABLE A.3 – Valeurs critiques du nombre de Rayleigh Ra_{co} , du nombre d'onde k_{co} et de la pulsation ω_{co} pour la bifurcation instationnaire, pour $\epsilon = 0.5$, $d = 5$, $Le = 5$, $\delta = 1$ et pour différentes valeurs du facteur de séparation ψ (Méthode spectrale Tau à l'ordre 5).

ψ	$N = 4$			$N = 5$		
	k_{co}	Ra_{co}	ω_{co}	k_{co}	Ra_{co}	ω_{co}
-0.020	2.543	43.856	0.662	2.542	43.857	0.661
-0.025	2.542	44.336	1.525	2.539	44.338	1.525
-0.028	2.541	45.629	1.865	2.536	44.630	1.865
-0.03	2.540	44.827	2.062	2.534	44.828	2.062
-0.04	2.537	45.840	2.868	2.533	45.842	2.868
-0.05	2.535	46.899	3.518	2.541	46.901	3.518
-0.06	2.532	48.006	4.087	2.537	48.011	4.087
-0.07	2.530	49.166	4.608	2.534	49.171	4.608
-0.08	2.527	50.382	5.096	2.531	50.387	5.096
-0.09	2.525	51.657	5.563	2.528	51.664	5.563
-0.10	2.522	52.998	6.012	2.526	53.005	6.013
-0.11	2.520	54.408	6.453	2.523	54.415	6.453
-0.12	2.518	55.893	6.887	2.521	55.901	6.887
-0.13	2.516	57.459	7.316	2.519	57.468	7.317
-0.14	2.514	59.113	7.744	2.517	59.122	7.744
-0.15	2.512	60.863	8.172	2.515	60.872	8.172
-0.16	2.510	62.717	8.602	2.513	62.727	8.602
-0.17	2.509	64.685	9.040	2.511	64.695	9.040
-0.18	2.507	66.777	9.480	2.510	66.788	9.480
-0.19	2.506	69.006	9.931	2.508	69.017	9.931
-0.20	2.505	71.386	10.392	2.507	71.398	10.392
-0.21	2.504	73.931	10.864	2.506	73.942	10.863
-0.22	2.503	76.661	11.349	2.505	76.674	11.348
-0.23	2.503	79.595	11.854	2.504	79.607	11.852
-0.24	2.503	82.758	12.376	2.504	82.772	12.374
-0.25	2.503	86.177	12.918	2.505	86.191	12.921
-0.26	2.503	89.884	13.482	2.505	89.901	13.485
-0.27	2.504	93.918	14.078	2.506	93.936	14.080
-0.28	2.505	98.323	14.703	2.507	98.343	14.704
-0.29	2.507	103.154	15.368	2.509	103.178	15.368
-0.30	2.509	108.473	16.071	2.511	108.498	16.069

TABLE A.4 – Valeurs critiques du nombre de Rayleigh Ra_{co} , du nombre d'onde k_{co} et de la pulsation ω_{co} pour la bifurcation instationnaire, pour $\epsilon = 0.7$, $d = 5$, $Le = 5$, $\delta = 1$ et pour différentes valeurs du facteur de séparation ψ (Méthode spectrale Tau à l'ordre 5).

ψ	$N = 4$			$N = 5$		
	k_{co}	Ra_{co}	ω_{co}	k_{co}	Ra_{co}	ω_{co}
-0.020	2.602	41.437	1.283	2.600	41.437	1.283
-0.025	2.601	41.777	1.748	2.601	41.778	1.748
-0.028	2.600	41.984	1.978	2.601	41.985	1.978
-0.03	2.600	42.123	2.119	2.602	42.125	2.119
-0.04	2.598	42.830	2.727	2.600	42.833	2.727
-0.05	2.596	43.558	3.238	2.597	43.560	3.238
-0.06	2.594	44.308	3.693	2.595	44.312	3.693
-0.07	2.592	45.082	4.111	2.593	45.087	4.111
-0.08	2.591	45.881	4.505	2.591	45.886	4.504
-0.09	2.590	46.706	4.881	2.591	46.711	4.882
-0.10	2.589	47.557	5.243	2.590	47.563	5.244
-0.11	2.588	48.437	5.594	2.589	48.444	5.595
-0.12	2.588	49.347	5.939	2.589	49.354	5.940
-0.13	2.588	50.289	6.279	2.588	50.296	6.277
-0.14	2.587	51.264	6.611	2.588	51.272	6.612
-0.15	2.587	52.274	6.940	2.587	52.283	6.941
-0.16	2.588	53.322	7.276	2.589	53.330	7.276
-0.17	2.588	54.408	7.605	2.589	54.417	7.605
-0.18	2.589	55.536	7.937	2.590	55.545	7.937
-0.19	2.590	56.708	8.270	2.591	56.718	8.270
-0.20	2.591	57.927	8.605	2.592	57.938	8.605
-0.21	2.592	59.195	8.942	2.593	59.207	8.942
-0.22	2.593	60.515	9.282	2.594	60.529	9.282
-0.23	2.595	61.892	9.630	2.596	61.905	9.629
-0.24	2.596	63.328	9.978	2.597	63.343	9.977
-0.25	2.598	64.828	10.335	2.599	64.845	10.334
-0.26	2.600	66.396	10.698	2.601	66.416	10.697
-0.27	2.603	68.038	11.072	2.604	68.059	11.071
-0.28	2.605	69.757	11.449	2.606	69.781	11.447
-0.29	2.608	71.560	11.838	2.609	71.801	11.836
-0.30	2.610	73.4542	12.231	2.612	73.847	12.330

TABLE A.5 – Valeurs critiques du nombre de Rayleigh Ra_{co} , du nombre d'onde k_{co} et de la pulsation ω_{co} pour la bifurcation instationnaire, pour $\epsilon = 0.3$, $d = 28.4$, $Le = 232$, $\delta = 3$ et pour différentes valeurs du facteur de séparation ψ (Méthode spectrale Tau à l'ordre 5).

ψ	$N = 4$			$N = 5$		
	k_{co}	Ra_{co}	ω_{co}	k_{co}	Ra_{co}	ω_{co}
-0.005	2.993	39.693	2.347	2.969	39.792	2.347
-0.008	3.017	40.086	3.021	2.994	40.191	3.021
-0.01	3.025	40.357	3.403	3.002	40.467	3.403
-0.02	3.040	41.779	4.936	3.017	41.909	4.934
-0.03	3.045	43.307	6.172	3.023	43.455	6.170
-0.04	3.048	44.953	7.273	3.026	45.120	7.270
-0.05	3.049	46.731	8.297	3.028	46.916	8.295
-0.06	3.050	48.655	9.280	3.029	48.859	9.277
-0.07	3.051	50.748	10.244	3.030	50.969	10.238
-0.08	3.052	53.029	11.201	3.032	53.270	11.197
-0.09	3.052	55.527	12.160	3.032	55.788	12.154
-0.10	3.053	58.275	13.134	3.033	58.556	13.130
-0.11	3.053	61.307	14.136	3.034	61.610	14.130
-0.12	3.053	64.704	15.168	3.034	65.032	15.162
-0.13	3.053	68.445	16.244	3.035	68.790	16.237
-0.14	3.053	72.680	17.374	3.035	73.048	17.364
-0.15	3.053	77.476	18.571	3.036	77.870	18.564
-0.16	3.054	82.952	19.856	3.037	83.373	19.846
-0.17	3.054	89.266	21.235	3.037	89.714	21.221
-0.18	3.054	96.631	22.738	3.038	97.112	22.728
-0.19	3.054	105.320	24.392	3.038	105.834	24.378
-0.20	3.054	115.739	26.238	3.039	116.294	26.229
-0.21	3.054	128.454	28.328	3.039	129.053	28.315
-0.22	3.054	144.317	30.736	3.039	144.960	30.718
-0.23	3.054	164.663	33.572	3.039	165.370	33.550
-0.24	3.054	191.706	37.005	3.039	192.490	36.979
-0.25	3.064	229.408	41.454	3.049	230.296	41.426
-0.26	3.064	285.609	47.166	3.049	286.631	47.137
-0.27	3.074	378.336	55.490	3.058	379.579	55.452
-0.28	3.083	560.179	68.919	3.064	561.815	68.848

TABLE A.6 – Valeurs critiques du nombre de Rayleigh Ra_{co} , du nombre d'onde k_{co} et de la pulsation ω_{co} pour la bifurcation instationnaire, pour $\epsilon = 0.4$, $d = 28.4$, $Le = 232$, $\delta = 3$ et pour différentes valeurs du facteur de séparation ψ (Méthode spectrale Tau à l'ordre 5).

ψ	$N = 4$			$N = 5$		
	k_{co}	Ra_{co}	ω_{co}	k_{co}	Ra_{co}	ω_{co}
-0.005	2.972	39.426	2.012	2.942	39.534	2.015
-0.008	3.007	39.701	2.598	2.979	39.807	2.598
-0.01	3.017	39.898	2.927	2.991	40.005	2.927
-0.02	3.036	40.930	4.232	3.011	41.048	4.230
-0.03	3.043	42.022	5.270	3.019	42.153	5.268
-0.04	3.048	43.176	6.178	3.023	43.318	6.176
-0.05	3.049	44.395	7.011	3.025	44.550	7.008
-0.06	3.050	45.686	7.796	3.027	45.855	7.795
-0.07	3.051	47.055	8.551	3.028	47.236	8.548
-0.08	3.051	48.510	9.287	3.029	48.703	9.282
-0.09	3.052	50.059	10.008	3.030	50.265	10.005
-0.10	3.052	51.711	10.728	3.031	51.929	10.723
-0.11	3.052	53.474	11.443	3.031	53.708	11.437
-0.12	3.053	54.367	12.164	3.032	55.613	12.160
-0.13	3.053	57.397	12.897	3.033	57.657	12.891
-0.14	3.053	59.583	13.638	3.034	59.857	13.635
-0.15	3.053	61.945	14.396	3.034	62.233	14.391
-0.16	3.0537	64.502	15.174	3.034	64.806	15.167
-0.17	3.053	67.279	15.976	3.035	67.597	15.972
-0.18	3.053	70.311	16.808	3.035	70.646	16.802
-0.19	3.053	73.626	17.673	3.035	73.979	17.665
-0.20	3.054	77.277	18.585	3.037	77.643	18.580
-0.21	3.054	81.309	19.537	3.037	81.695	19.530
-0.22	3.054	85.784	20.542	3.037	86.187	20.532
-0.23	3.054	90.787	21.610	3.038	91.212	21.605
-0.24	3.054	96.412	22.751	3.038	96.856	22.743
-0.25	3.054	102.779	23.977	3.038	103.245	23.966
-0.26	3.054	110.053	25.305	3.038	110.544	25.291
-0.27	3.054	118.445	26.755	3.039	118.963	26.747
-0.28	3.054	128.223	28.351	3.039	128.770	28.340
-0.29	3.054	139.765	30.126	3.039	140.339	30.111
-0.30	3.054	153.599	32.124	3.039	154.211	32.106

TABLE A.7 – Valeurs critiques du nombre de Rayleigh Ra_{co} , du nombre d'onde k_{co} et de la pulsation ω_{co} pour la bifurcation instationnaire, pour $\epsilon = 0.5$, $d = 28.4$, $Le = 232$, $\delta = 3$ et pour différentes valeurs du facteur de séparation ψ (Méthode spectrale Tau à l'ordre 5).

ψ	$N = 4$			$N = 5$		
	k_{co}	Ra_{co}	ω_{co}	k_{co}	Ra_{co}	ω_{co}
-0.005	2.938	39.291	1.771	2.901	39.417	1.778
-0.008	2.995	39.483	2.330	2.990	39.564	2.331
-0.01	3.008	39.636	2.623	3.001	39.720	2.623
-0.02	3.032	40.434	3.760	3.006	40.546	3.759
-0.03	3.039	41.283	4.669	3.014	41.404	4.668
-0.04	3.044	42.169	5.461	3.019	42.301	5.668
-0.05	3.046	43.096	6.179	3.022	43.235	6.177
-0.06	3.048	44.064	6.851	3.025	44.212	6.850
-0.07	3.049	45.079	7.489	3.026	45.236	7.487
-0.08	3.050	46.141	8.104	3.027	46.308	8.101
-0.09	3.050	47.256	8.701	3.028	47.432	8.699
-0.10	3.051	48.425	9.289	3.029	48.610	9.285
-0.11	3.051	49.654	9.866	3.029	49.850	9.862
-0.12	3.052	50.947	10.443	3.031	51.153	10.441
-0.13	3.052	52.313	11.016	3.031	52.527	11.012
-0.14	3.052	53.751	11.589	3.031	53.977	11.584
-0.15	3.052	55.273	12.166	3.032	55.507	12.163
-0.16	3.053	56.885	12.753	3.033	57.131	12.749
-0.17	3.053	58.594	13.343	3.033	58.849	13.337
-0.18	3.053	60.408	13.942	3.034	60.676	13.940
-0.19	3.053	62.340	14.553	3.034	62.618	14.549
-0.20	3.053	64.403	15.178	3.034	64.690	15.172
-0.21	3.053	66.604	15.818	3.034	66.902	15.810
-0.22	3.053	68.963	16.476	3.035	69.262	16.469
-0.23	3.054	71.499	17.161	3.036	71.819	17.155
-0.24	3.054	74.226	17.863	3.036	74.559	17.855
-0.25	3.054	77.170	18.591	3.037	77.518	18.588
-0.26	3.054	80.360	19.349	3.037	80.719	19.344
-0.27	3.054	83.830	20.141	3.037	84.200	20.133
-0.28	3.054	87.611	20.970	3.037	87.995	20.960
-0.29	3.054	91.754	21.842	3.038	92.151	21.837
-0.30	3.054	96.307	22.762	3.038	96.720	22.755

TABLE A.8 – Valeurs critiques du nombre de Rayleigh Ra_{co} , du nombre d'onde k_{co} et de la pulsation ω_{co} pour la bifurcation instationnaire, pour $\epsilon = 0.7$, $d = 28.4$, $Le = 232$, $\delta = 3$ et pour différentes valeurs du facteur de séparation ψ (Méthode spectrale Tau à l'ordre 5).

ψ	$N = 4$			$N = 5$		
	k_{co}	Ra_{co}	ω_{co}	k_{co}	Ra_{co}	ω_{co}
-0.008	2.968	39.233	1.923	2.930	39.354	1.927
-0.01	3.001	39.321	2.184	2.966	39.430	2.186
-0.02	3.024	39.881	3.148	2.884	39.989	3.148
-0.03	3.035	40.466	3.904	3.008	40.576	3.904
-0.04	3.039	41.073	4.551	3.013	41.187	4.550
-0.05	3.043	41.696	5.135	3.017	41.817	5.133
-0.06	3.045	42.341	5.674	3.020	42.467	5.673
-0.07	3.046	43.008	6.181	3.022	43.138	6.180
-0.08	3.048	43.694	6.666	3.024	43.831	6.664
-0.09	3.048	44.403	7.128	3.024	44.547	7.126
-0.10	3.049	45.136	7.579	3.026	45.285	7.578
-0.11	3.050	45.895	8.020	3.027	46.048	8.017
-0.12	3.050	46.680	8.449	3.027	46.839	8.445
-0.13	3.051	47.491	8.874	3.029	47.656	8.872
-0.14	3.051	48.332	9.291	3.029	48.504	9.289
-0.15	3.051	49.203	9.704	3.029	49.381	9.701
-0.16	3.051	50.107	10.115	3.029	50.291	10.111
-0.17	3.052	51.044	10.528	3.031	51.234	10.526
-0.18	3.052	52.018	10.937	3.031	52.216	10.935
-0.19	3.052	53.031	11.347	3.031	53.233	11.343
-0.20	3.052	54.082	11.757	3.031	54.292	11.753
-0.21	3.052	55.178	12.170	3.032	55.392	12.168
-0.22	3.053	56.317	12.589	3.033	56.539	12.587
-0.23	3.053	57.508	13.009	3.033	57.735	13.005
-0.24	3.053	58.751	13.433	3.033	58.984	13.428
-0.25	3.053	60.044	13.861	3.033	60.286	13.855
-0.26	3.053	61.403	14.296	3.034	61.648	14.293
-0.27	3.053	62.819	14.736	3.034	63.071	14.732
-0.28	3.053	64.305	15.184	3.034	64.564	15.179
-0.29	3.053	65.863	15.640	3.034	66.130	15.634
-0.30	3.053	67.500	16.105	3.035	67.772	16.103

Bibliographie

- [1] E. Abu-Nada, Z. Masoud, H. F. Oztop, and A. Campo. Effect of nanofluid variable properties on natural convection in enclosures. *International Journal of Thermal Sciences*, 49(3) :479 – 491, 2010.
- [2] Z. Alloui, J. Guet, P. Vasseur, and M. Reggio. Natural convection of nanofluids in a shallow rectangular enclosure heated from the side. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 90(1) :69 – 78, 2012.
- [3] A. Alonso and O. Batiste. Onset of oscillatory binary fluid convection in three-dimensional cells. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 18 :239 – 250, 2004.
- [4] A. Alonso, O. Batiste, A. Meseguer, and I. Mercader. Complex dynamical states in binary mixture convection with weak negative soret coupling. *Physical Review E*, 75 :026310 – 026325, 2007.
- [5] S. Amelinckx, D. Bernaerts, X. B. Zhang, G. Van Tendeloo, and J. Van Landuyt. A structure model and growth mechanism for multishell carbon nanotubes. *Science*, 267(5202) :1334 – 1341, 1995.
- [6] A. Bahloul. Boundary layer and stability analysis of natural convection in a porous cavity. *International Journal of Thermal Sciences*, 45(7) :635 – 642, 2006.
- [7] A. Bahloul, N. Boutana, and P. Vasseur. Double-diffusive and soret-induced convection in a shallow horizontal porous layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 491 :325 – 352, 2003.
- [8] A. Bahloul, P. Vasseur, and L. Robillard. Convection of a binary fluid saturating a shallow porous cavity subjected to cross heat fluxes. *Journal of Fluid Mechanics*, 574 :317 – 442, 2007.
- [9] G. K. Batchelor. Brownian diffusion of particles with hydrodynamic interaction. *Journal of Fluid Mechanics*, 74(1) :1 – 29, 1976.
- [10] J. Bear. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. 1972.
- [11] J. L. Beck. Convection in a box of porous materials saturated with fluid. *Physics of Fluids*, 15 :1377 – 1383, 1972.

- [12] R. Bennacer, M. El Ganaoui, T. Maré, and C. T. Nguyen. Natural convection of nano-fluids in cavity including the sores effect. *Computational of thermal Sciences*, 1(4) :425 – 440, 2009.
- [13] R. Bennacer, A. Mahidjiba, P. Vasseur, H. Beji, and R. Duval. The sores effect on convection in a horizontal porous domain under cross temperature and concentration gradients. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 13(2) :199 – 215, 2003.
- [14] S. Berber, Y. K. Kwon, and T. David. Unusually high thermal conductivity of carbon nanotubes. *Physical Review Letters*, 84(20) :4613 – 4616, 2000.
- [15] R. G. Bird, W. E. Stewart, and E. N. Lightfoot. *Transport Phenomena*. 1960.
- [16] S. Bories. *Natural convection in porous media*. 1985.
- [17] S. Bories. Natural convection in porous media. *Advances in Transport Phenomene in Porous Media*, 77 :141, 1989.
- [18] S. Bories and M. Prat. Tranferts de chaleur dans les milieux poreux. *Techniques de l'Ingénieur*, pages B 8 250 : 1 – 33, 1995.
- [19] M. M. Bou-Ali, O. Ecenarro, J. A. Madariaga, C. M. Santamaria, and J. J. Valencia. Thermogravitational measurement of the sores coefficient of liquid mixtures. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 10(15) :3321 – 3331, 1998.
- [20] M. M. Bou-Ali, O. Ecenarro, J. A. Madariaga, C. M. Santamaria, and J. J. Valencia. Stability of convection in a vertical binary fluid layer with an adverse density gradient. *Phys. Rev. E*, 59(1) :1250 – 1252, Jan 1999.
- [21] M. Bourich, A. Amahmid, and M. Hasnaoui. Double diffusive convection in a porous enclosure submitted to cross gradients of temperature and concentration. *Energy Conversion and Management*, 45(11-12) :1655 – 1670, 2004.
- [22] M. Bourich, M. Hasnaoui, M. Mamou, and A. Amahmid. Sores effect inducing subcritical and hopf bifurcations in a shallow enclosure filled with a clear binary fluid or a saturated porous medium : A comparative study. *Physics of Fluids*, 16(3) :551 – 568, 2004.
- [23] J. Boussinesq. *Théorie analytique de la chaleur*. Paris, 1903.
- [24] H. Brand and V. Steinberg. Convection instabilities in binary mixtures in a prous medium. *Physica A : Statistical and Theorical Physics*, 119(1-2) :327 – 338, april 1983.
- [25] H. Brand and V. Steinberg. Nonlinear effects in the convective instability of a binary mixture in a porous medium near threshold. *Physics Letters A*, 93(7) :333 – 336, January 1983.

- [26] H. C. Brinkman. The viscosity of concentrated suspensions and solution. *J. Chem. Phys.*, 20 :571 – 581, 1952.
- [27] F. H. Busse and N. Riahi. Nonlinear convection in a layer with nearly insulating boundaries. *Journal of Fluid Mechanics*, 90.
- [28] H. B. G. Casimir. Statistic foundations of the thermodynamic of irreversible processes. *Cem. Weekblad*, 50 :318 – 320, 1954.
- [29] M. C. Charrier-Mojtabi, B. Elhajjar, and A. Mojtabi. Analytical and numerical stability analysis of sores-driven convection in a horizontal porous layer. *Physics of Fluids*, 19(12) :124104, 2007.
- [30] M. C. Charrier-Mojtabi, B. Elhajjar, B. Ouattara, A. Mojtabi, and P. Costesèque. Soret-driven convection and separation of binary mixtures in a porous horizontal slot submitted to a heat flux. *Comptes Rendus de Mécanique*, 339(5) :303 – 309, 2011.
- [31] M. C. Charrier-Mojtabi, A. Fontaine, and A. Mojtabi. Influence of acoustic streaming on thermo-diffusion in a binary mixture under microgravity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55 :5992 – 5999, 2012.
- [32] M. C. Charrier Mojtabi, Y. P. Razi, K. Maliwan, and A. Mojtabi. Influence of vibration on sores-driven convection in porous media. *Numerical Heat Transfer, Part A : Applications*, 46(10) :981 – 993, 2004.
- [33] P. Chassaing. *Mécanique des fluides, élément d'un premier parcours*. 2000.
- [34] C. F. Chen and D. H. Jhonson. Double diffusive convection : A report on an engineering foudation conference. *Journal of Fluid Mechanics*, 138 :135 – 416, 1984.
- [35] S. Choi. Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles. *Developments and Applications of Non-Newtonian Flows*, D. A. Siginer, and H. P. Wang, eds., *The American Society of Mechanical Engineers, New York*, 231 :99 – 105, 1995.
- [36] S. U. S. Choi, Z. G. Zhang, W. Yu, F. E. Lockwood, and E. A. Grulke. Anomalous thermal conductivity enhancement in nanotube suspensions. *Applied Physics Letters*, 79(14) :2252 – 2254, 2001.
- [37] K. Clusius and G. Dickel. Neues verfahren zur gasentmischung und isotopentrennung. *naturwissenschaften*, 26(33) :546 – 546, August 1938.
- [38] M. A. Combarous. *Convection naturelle et mixte en milieu poreux*. PhD thesis, Université de Paris VI, 1970.
- [39] M. A. Combarous and S. A. Bories. Hydrothermal convection in saturated porous media. *Advances in Hydrosience*, 10 :231 – 307, 1975.

- [40] M. A. Combarous and S. A. Bories. Modelization of natural convection inside a horizontal porous layer using a solid-fluid transfer coefficient. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 17(4) :505 – 515, April 1974.
- [41] P. Costesèque. *Sur la migration sélective des isotopes et des éléments par la thermodiffusion dans les solutions. Application de l'effet thermogravitationnel en milieux poreux. Observations Expérimentales et conséquences géochimiques*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, 1982.
- [42] P. Costesèque, M. Hridabba, and J. Sahores. Sur la différenciation des hydrocarbures constituant la fraction légère d'un brut par la thermodiffusion gravitationnelle en milieux poreux. *Compte Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, 304 :1069 – 1074, 1987b.
- [43] P. Costesèque, El. Maataoui, and J. Sahores. Sur la différenciation des hydrocarbures constituant la fraction légère d'un brut par la thermodiffusion gravitationnelle en milieux poreux. *Compte Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, 305 :1531 – 1536, 1987a.
- [44] P. Costesèque, T. Pollak, J. K. Platten, and M. Marcoux. Transient-state method for coupled evaluation of soret and fick coefficients, and related tortuosity factors, using free and porous packed thermodiffusion cells : Application to $CuSO_4$ aqueous solution (0.25m). *The European Physical Journal E*, 15(3) :249 – 253, 2004.
- [45] H. Davarzani. *Déterminations théorique et expérimentale des coefficients de diffusion et de thermodiffusion en milieu poreux*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2010.
- [46] S. R. De Groot. *Théorie phénoménologique du procédé thermo-gravitationnel de séparation dans un liquide*, volume 9. 1942.
- [47] S. R. De Groot and P. Mazur. *Non-Equilibrium Thermodynamics*. 1984.
- [48] G. Donzelli, R. Cerbino, and A. Vailati. Bistable heat transfer in a nanofluid. *Phys. Rev. Lett.*, 102(10) :104503 – 104506, Mar 2009.
- [49] J. F. Dutrieux, J. K. Platten, G. Chavepeyer, and M. M. Bou-Ali. On the measurement of positive soret coefficients. *Journal of Physical Chemistry B*, 106(23) :6104 – 6114, 2002.
- [50] J. A. Eastman, S. R. Phillpot, S. U. S. Choi, and P. Keblinski. Thermal transport in nanofluids. *Annual Reviews Materials Research*, 34 :219 – 246, 2004.
- [51] O. Ecenarro, J. A. Madariaga, J. Navarro, C. M. Santamaria, J. A. Carrion, and J. M. Saviron. Non-steady-state density effects in liquid thermal diffusion columns. *Journal of Physics : Condensed Matter* 1, 48 :9941 – 9950, 1989.

- [52] O Ecenarro, J. A. Madariaga, J. Navarro, C. M. Santamaria, J. A. Carrion, and J. M. Saviron. Fickian and thermal diffusion coefficients from liquid thermogravitational columns. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 9 :2289 – 2296, 1990.
- [53] A. Einstein. *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*. 1956.
- [54] B. Elhajjar, G. Bachir, A. Mojtabi, and M. C. Marie-Charrier. Modeling of rayleigh-bénard natural convection heat transfer in nanofluids. *Compte Rendu de Mécanique*.
- [55] B. Elhajjar, M. C. Charrier-Mojtabi, and A. Mojtabi. Separation of a binary fluid mixture in a porous horizontal cavity. *Physical Review E*, 77(2) :026310, February 2008.
- [56] B. Elhajjar, A. Mojtabi, and M. C. Charrier-Mojtabi. Influence of vertical vibrations on the separation of the binary mixture in a horizontal porous layer heated from below. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52 :165 – 172, 2009.
- [57] A. H. Emery and M. Lorenz. Thermal diffusion in a packed column. *AIChE Journal*, 9(5) :660 – 663, 1963.
- [58] W. H. Furry, R. C. Jones, and L. Onsager. On the theory of isotope separation by thermal diffusion. *Physical Review*, 55 :1083 – 1095, 1939.
- [59] De Groot. *L'effet Soret : Diffusion thermique dans les phases condensées*. PhD thesis, Université d'Amsterdam, Pays Bas, 1945.
- [60] De Groot and P. Mazur. *Non equilibrium thermodynamics*. North-Holland Pub. Co., 1961.
- [61] R. L. Hamilton and O. K. Crosser. Thermal conductivity of heterogeneous two - component system. *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, 1(3) :187 – 191, 1962.
- [62] K. B. Haugen and A. Firoozabadi. On the unsteady-state species separation of a binary liquid mixture in a rectangular thermogravitational column. *The Journal of Chemical Physics*, 124(5) :054502 – 9950, 2006.
- [63] D. T. J. Hurle, E. Jakeman, and E. R. Pike. On the solution of the Bénard problem with boundaries of finite conductivity. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 296 :469 – 475, 1967.
- [64] D. B. Ingham and I. Pop. *Transport Phenomena in Porous Media*. Vol. III, Elsevier Sciences, Amsterdam, 2005.
- [65] D. R. Jenkins and M. R. E. Proctor. The transition from roll to square-cell solutions in rayleigh-bénard convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 139 :461 – 471, 1984.

- [66] F. Joly, P. Vasseur, and G. Labrosse. Soret-driven thermosolutal convection in a vertical enclosure. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 27(6) :755 – 754, 2000.
- [67] D. Jung and M. Lücke. Bistability of moving and self-pinned fronts of supercritical localized convection structures. *Europhysics Letters*, 80(1) :14002, 2007.
- [68] P. Keblinski, J. A. Eastman, and D. G. Cahill. Nanofluids for thermal transport. *Materials today*, 8 :36 – 40, 2005.
- [69] P. Keblinski, R. Prasher, and J. Eapen. Thermal conductance of nanofluids : Is the controversy over ? *Journal Nanoparticle Research*, 10(7) :1089 – 1097, 2008.
- [70] K. Khanafer, K. Vafai, and M. Lightstone. Bouyancy-driven heat transfer enhancement in a two-dimensionnal enclosure utilizing nanofluids. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, (46) :3639 – 3653, 2003.
- [71] S. Kimura, M. Vynnycky, and F. Alavyoon. Unicellular natural circulation in a shallow horizontal porous layer heated from below by a constant flux. *Journal of Fluid Mechanics*, 294 :231 – 257, 1995.
- [72] E. Knobloch and D. R. Moore. Linear stability of experimental soret convection. *Phys. Rev. A*, 37(3) :860 – 870, Feb 1988.
- [73] H. Korsching and K. Wirtz. Zur trennung von flüssigkeisgemischen im clusiuschen trennröhr (tennung der zinkisotope). *naturwissenschaften*, 35(20) :367 – 368, May 1939.
- [74] E. R. Lapwood. Convection of a fluid in a porous medium. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 44(04) :508 – 521, 1948.
- [75] M. Lorenz and A. H. Emery. The packed thermal diffusion column. *Chemical Engineering Science*, 11(1) :16 – 23, 1959.
- [76] C. Ludwig. Diffusion zwischen unfleig erwärmten orten gleich zusammengesetz lösungen. *Akad. Wiss. Wien, Math Naturwiss*, 20 :539, 1856.
- [77] S. E. Maïga, C. T. Nguyen, N. Galanis, and G. Roy. Heat transfer enchancement in forced convection laminar tube flow by using nanofluids. *ICHMT International Symposium on Advances in Computatinnal Heat Transfer, G. de Vahl Davis and E. Leonardi (Eds.) CDROM Proceedings, ISBN 1-5670-174-2, Begell House, New York, April 2004.*
- [78] M. Mamou and P. Vasseur. Thermosolutal bifurcation phenomena in a porous enclosure subject to vertical temperature and concentration gradients. *Journal of Fluid Mechanics*, 395 :61 – 87, 1999.

- [79] M. Mamou, P. Vasseur, and E. Bilgen. Multiple solutions for double-diffusive convection in a vertical porous enclosure. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38(10) :1787 – 1798, 1995.
- [80] M. Mamou, P. Vasseur, E. Bilgen, and D. Gobin. Double diffusive convection in an inclined slot filled with porous medium. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 14(5) :629 – 652, 1995.
- [81] M. Marcoux and M. C. Charrier Mojtabi. étude paramétrique de la thermogravitation en milieu poreux. *C. R. Acad. Sci. Paris série Iib*, 326 :539 – 546.
- [82] M. Marcoux and P. Costesèque. Study of transversal dimension influence on species separation in thermogravitational diffusion columns. *The Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 32 :289 – 298, 2007.
- [83] C. M. Marle. écoulement monophasiques en milieux poreux. *Revue Institut Français du Pétrole*, 22(10) :1471 – 1509, 1967.
- [84] G. Marsily. *Quantitative hydrogeology. Groundwater hydrology for engineers*. New-York, 1986.
- [85] H. Masuda, A. Ebata, K. Teramae, and N. Hishinuma. Alteration of thermal conductivity and viscosity of liquid by dispersing ultra-fine particles (dispersion of γ - Al_2O_3 , SiO_2 , and TiO_2 ultra-fine particles). *Netsu Bussei*, 4 :227 – 233, 1993.
- [86] J. C. Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism*. 1873.
- [87] K. N. Mehta and K. Nandakumar. Natural convection with combined heat and mass transfer buoyancy effects in non-homogeneous porous medium. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 30 :2651 – 2656, 1987.
- [88] A. Mojtabi, J. K. Platten, and M. C. Charrier-Mojtabi. Onset of free convection in solutions with variable sorét coefficients. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 27(1) :25 – 44, 2002.
- [89] A. Mojtabi and D. A. S. Rees. The effect of conducting bounding plates on the onset of horton-rogers-lapwood convection. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54(1-3) :293 – 301, 2011.
- [90] M. C. Charrier Mojtabi, K. Maliwan, Y. P. Razi, G. Bardan, and A. Mojtabi. Control of thermoconvective flows by vibration. *Mecanique and Industries*, 4 :545 – 549, 2003.
- [91] F. Montel. Importance de la thermodiffusion en exploration et production pétrolières. *Entropie*, 184 :86 – 93, 1994.

- [92] B. T. Murray and C. F. Chen. Double diffusive convection in a porous medium. *Journal of Fluid Mechanics*, 201 :147 – 166, 1989.
- [93] P. A. L. Narayana, P. V. S. N. Murthy, and R. S. R. Gorla. Soret-driven thermosolutal convection induced by inclined thermal and solutal gradients in a shallow horizontal layer of a porous medium. *Journal of Fluid Mechanics*, 612 :1 – 19, 2008.
- [94] D. A. Nield. Onset of thermohaline convection in porous medium. *Water Resources Research*, 4 :553 – 560, 1968.
- [95] D. A. Nield and A. Bejan. *Convection in Porous Media, troisième ed.* Springer Sciences+Business Media, Inc., New York, 2006.
- [96] D. A. Nield and A. V. Kuznetsov. The effects of combined horizontal and vertical heterogeneity and anisotropy on the onset of convection in a porous medium. *International Journal of Thermal Sciences*, 46(12), 2007.
- [97] P. Nithiarasu, K. N. Seetharamu, and T. Sundarajan. Double diffusive natural convection in an enclosure filled with fluid-saturated porous medium : a general non - darcy approach. *Numerical Heat Transfer*, 30 :413 – 426, 1996.
- [98] A. Oberbeck. *Ueber die wärmeleitung der flüssigkeiten bei berücksichtigung der strömungen infolge von temperaturdifferenzen.* 243(6) : 271 - 292, 1879.
- [99] L. Onsager. Reciprocal relations in irreversible processes i. *Physical Review*, 37(4) :405 – 426, February 1931.
- [100] M. N. Ouarzazi and P. Bois. Convective instability of a fluid mixture in a porous medium with time-dependent temperature-gradient. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 13(3) :275 – 278, 1994.
- [101] S. Özerinç, S. Kakaç, and A. G. Yazicioglu. Enhanced thermal conductivity of nanofluids : A state-of-the-art review. *Microfluid Nanofluid*, 8(2) :145 – 170, 2010.
- [102] H. E. Patel, K. B. Anoop, T. Sundararajan, and S. K. Das. Model for thermal conductivity of cnt-nanofluids. *Bulletin of Materials Science*, 31(3) :387 – 390, 2008.
- [103] J. K. Platten. The soret effect : A review of recent experimental results. *Journal of Applied Mechanics*, 73(1) :5 – 15, 2006.
- [104] J. K. Platten, M. M. Bou-Ali, and J. F. Dutrieux. Enhanced molecular separation in inclined thermogravitational columns. *The Journal of Physical Chemistry B*, 107(42) :11763 – 11767, 2003.
- [105] J. K. Platten and P. Costesèque. The soret coefficient in porous media. *Journal of porous media*, 7(4) :317 – 329, 2004.

- [106] J. K. Platten and J. C. Legros. *Convection in liquids*. 1984.
- [107] D. Poulikakos. Double diffusive convection in a horizontal sparsely packed porous layer. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 13 :587 – 598, 1986.
- [108] I. Prigogine. *Thermodynamics of irreversible processes*. J. Wiley, 1961.
- [109] M. R. E. Proctor. Planform selection by finite-amplitude thermal-convection between poorly conducting slabs. *Journal of fluid mechanics*, 113 :469 – 485, 1981.
- [110] A. Prosperetti. A simple analytic approximation to the Rayleigh - Benard stability threshold. *Physics of Fluids*, 23(12) :124101 – 124108, 2011.
- [111] D. A. S. Rees and A. Barletta. Linear instability of the isoflux Darcy - Benard problem in an inclined porous layer. *Transport in Porous Media*, 87(3) :665 – 678, 2011.
- [112] D. A. S. Rees and A. Mojtabi. The effect of conducting boundaries on weakly nonlinear Darcy - Benard convection. *transport Porous Media*, 88 :45 – 63, 2011.
- [113] D. N. Riahi. Nonlinear convection in a porous layer with finite conducting boundaries. *Journal of Fluid Mechanics*, 129 :153 – 171, 1983.
- [114] R. J. Ribando and K. E. Torrance. Natural convection in a porous medium : effects of confinement, variable permeability, and thermal boundary conditions. *Journal of Heat Transfer*, 98 :42, 1976.
- [115] D. S. Riley and K. H. Winters. Modal exchange mechanisms in lapwood convection. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 204 :325–358, 1989.
- [116] W. Ruland, A. K. Schaper, H. Hou, and A. Greiner. Multi-wall carbon nanotubes with uniform chirality : evidence for scroll structures. *carbon*, 41(3) :423 – 427, 2003.
- [117] W. Schöpf. Convection onset for a binary mixture in a porous medium and in a narrow cell. *Journal of Fluid Mechanics*, 245 :263 – 278, 1992.
- [118] L. M. Schwartz, E. J. Garboczi, and D. P. Bentz. Interfacial transport in porous media : Application to dc electrical conductivity of mortars. *Journal of Applied Physics*, 78(10) :5898 – 5908, 1995.
- [119] V. M. Shevtsova, D. E. Melnikov, and J. C. Legros. Onset of convection in sores-driven instability. *Physical Review E*, 73(4) :047302, April 2006.
- [120] V. M. Shevtsova, D. E. Melnikov, and J. C. Legros. Unstable density stratification in binary mixture. *Progress in Computational Fluid Dynamics*, 6(6) :348 – 356, 2006.
- [121] C. Soret. Influence de la température sur la distribution des sels dans leurs solutions. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 91 :289 – 291, 1880.

- [122] C. Soret. Sur l'état d'équilibre que prend au point de vue de sa concentration une dissolution saline primitivement homogène dont deux parties sont portées à des températures différentes. *Arch. Sci. Phys. Nat.*, 2 :48 – 61, 1881.
- [123] O. Sovran, M. C. Charrier-Mojtabi, and A. Mojtabi. Naissance de la convection thermosolutale en couche poreuse infinie avec effet solet. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Series IIB, Mec des fluides/Fluid Mechanics*, 329 :287 – 293, April 2001.
- [124] E. M. Sparrow, R. J. Goldstein, and V. H. Jonsson. Thermal instability in a horizontal fluid layer : effect of boundary conditions and nonlinear temperature profile. *Journal of fluid mechanics*, 18 :513 – 528, 1964.
- [125] O. V. Trevisan and A. Bejan. Natural convection with combined heat and mass transfer buoyancy effects in a porous medium. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 28(8), 1985.
- [126] P. Vadász. in : *Peter Vadász (Ed), Theory and applications of Transport in porous Media*. Vol. 22, Springer, Hardcover ISBN : 978-1-4020-8177-4, 2008.
- [127] K. Vafai. *Handbook of Porous Media, seconde ed.* Taylor and Francis, New York , pp. 269-320, 2005.
- [128] J. J. Valencia, M. M. Bou-Ali, J. K. Platten, O. Ecenarro, J. M Madariaga, and C. M. Santamaria. Fickian diffusion coefficient of binary liquid mixtures in a thermogravitational column. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 32(3) :299 – 307, 2007.
- [129] C. Y. Wang. Onset of convection in a fluid-saturated rectangular box, bottom heated by constant flux. *Physics of Fluids*, 11(6) :1673 – 1675, 1999.
- [130] S. Wang and W. Tan. Stability analysis of solet-driven double-diffusive convection of maxwell fluid in a porous medium. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 32 :88 – 94, 2011.
- [131] X. Q. Wang and A. S. Mujumdar. A review on nanofluids - part I : Theoretical and numerical investigations. *Brazilian Society of Chemical Engineering*, 25(4) :613 – 630, 2009.
- [132] X. Q Wang, A. S. Mujumdar, and C. Yap. Thermal characteristics of tree-shaped microchannel nets for cooling of a rectangular heat sink. *International Journal of Thermal Sciences*, 45(11) :1103 – 1112, 2006.
- [133] Y. Wang, Z. Iqbal, and S. Mitra. Rapidly functionalized, water-dispersed carbon nanotubes at high concentration. *Journal of the American Chemical Society*, 128 :95 – 99, 2006.

-
- [134] W. Yu and S. U. S. Choi. The role of interfacial layers in the enhanced thermal conductivity of nanofluids : A renovated maxwell models. *Journal of Nanoparticle Research*, 5(1) :167 – 171, 2003.
- [135] O. Zhou, R. M. Fleming, D. W. Murphy, C. H. Chen, R. C. Haddon, A. P. Ramirez, and S. H. Glarum. Defects in carbon nanostructures. *Science*, 263(5154) :1744 – 1747, 1994.

